

## Annexe : Décomposition saisonnière

### I - Les composantes d'une série chronologique

#### 1. La tendance à long terme

La *tendance à long terme* ou *trend*, notée  $f_t$ , représente l'évolution à long terme de la grandeur, et traduit l'aspect général de la série.

#### 2. Le mouvement saisonnier

La *composante saisonnière*, noté  $s_t$ , se répète à intervalles de temps égaux avec une forme à peu près constante. Elle peut résulter du rythme des saisons ou de facteurs humains. Sa période est égale à 12 pour les séries mensuelles, et à 4 pour les séries trimestrielles.

Si  $p$  désigne la période du mouvement saisonnier :  $s_t = s_{t+p} = s_{t+2p} = \dots$

La composante saisonnière est donc totalement déterminée par  $p$  coefficients saisonniers :

$$s_1, \dots, s_j, \dots, s_p$$

#### 3. Le « bruit » (les irrégularités)

Cette composante, appelée aussi *mouvement résiduel* et notée  $e_t$ , regroupe tout ce qui n'a pas été pris en compte par la tendance et la saisonnalité. Elle est la résultante de fluctuations irrégulières et imprévisibles dues à des facteurs perturbateurs non permanents ; ces fluctuations sont supposées de *faible amplitude* et de *moyenne nulle* sur un petit nombre d'observations consécutives.

### II - Les modèles de composition

La décomposition d'une série chronologique avec un mouvement saisonnier peut s'effectuer selon deux types de modèles.

#### a) Modèle additif

C'est le modèle adapté lorsque la saisonnalité s'additionne à la tendance.

$$x_t = f_t + s_t + e_t \quad t = 1, \dots, T$$

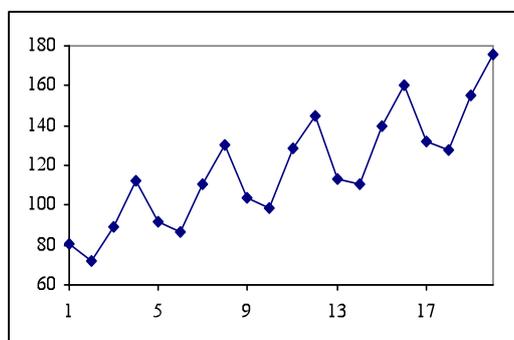


Figure 1 – Modèle additif adapté

## b) Modèle multiplicatif

C'est le modèle adapté lorsque la saisonnalité est proportionnelle à la tendance.

$$x_t = f_t \cdot (1 + s_t) \cdot (1 + e_t) \quad t = 1, \dots, T$$

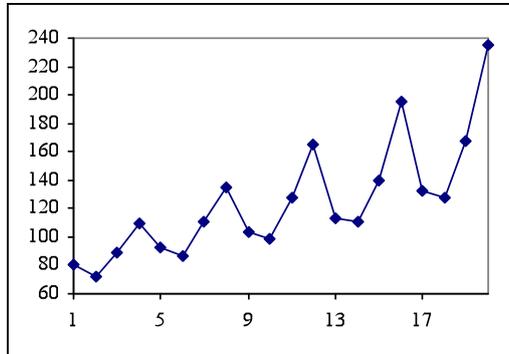


Figure 2 – *Modèle multiplicatif adapté*

Notons qu'une transformation logarithmique du modèle multiplicatif le ramène au modèle additif :

$$\log(x_t) = \log(f_t \cdot (1 + s_t) \cdot (1 + e_t)) \approx \log(f_t) + \log(1 + s_t) + e_t \quad \text{puisque} \quad \log(1 + e_t) \approx e_t$$

## III - Définition d'une moyenne mobile centrée de longueur paire

### a) Moyennes mobiles centrées de longueur $p$ de la série $\{x_t, t = 1, \dots, T\}$

$$M_p(t) = \frac{1}{p} \left[ \frac{x_{t-m}}{2} + \sum_{k=-m+1}^{m-1} x_{t+k} + \frac{x_{t+m}}{2} \right] \quad \text{avec } p = 2m$$

### b) Application : moyennes mobiles centrées de longueur 4 de la série $\{x_t, t = 1, \dots, T\}$

$$M_p(t) = \frac{1}{p} \left[ \frac{x_{t-2}}{2} + x_{t-1} + x_t + x_{t+1} + \frac{x_{t+2}}{2} \right]$$

La suite des moyennes mobiles de longueur égale à la période du mouvement saisonnier élimine la composante saisonnière, et de ce fait, fournit une évaluation de la tendance.

L'exemple qui suit va illustrer ce propos.

## IV – Décomposition saisonnière d'une chronique : exemple

Pour déterminer la tendance et les coefficients saisonniers d'une chronique, on peut utiliser un logiciel ou un tableau.

On va montrer les étapes successives du traitement de la chronique « *Indices des dépenses des touristes étrangers en France, base 2005* » (tableau 1).

Trimestre Année	1 <sup>er</sup> trimestre	2 <sup>ème</sup> trimestre	3 <sup>ème</sup> trimestre	4 <sup>ème</sup> trimestre	Moyenne annuelle
2003	75,0	83,1	105,4	74,0	84,4
2004	81,7	96,5	114,4	78,9	92,9
2005	88,9	104,4	123,8	82,9	100,0
2006	90,0	105,7	125,3	83,9	101,2
2007	91,1	107,0	128,1	86,3	103,1
Moyenne trimestrielle	106,7	124,2	149,3	101,5	Moyenne générale 120,4

Tableau 1 – *Indices des dépenses des touristes étrangers en France, base 2005*

Source : *Ministère du Tourisme*

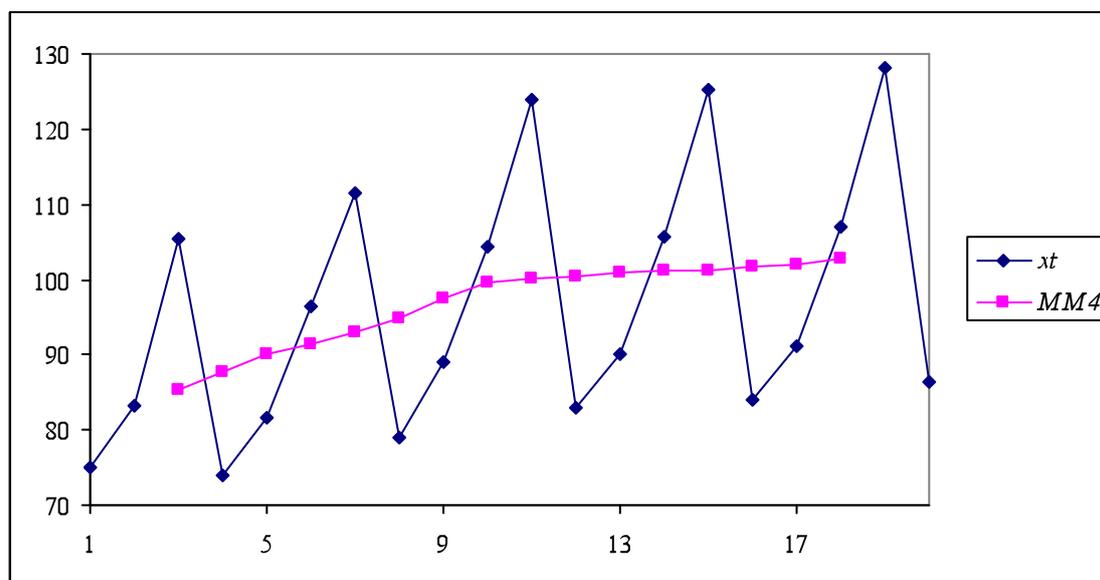


Figure 3 – *Représentation de la série des indices du tableau 1 et de la suite des moyennes mobiles de longueur 4*

Une saisonnalité de période 4 (nombre de trimestres) apparaît sur la représentation graphique (figure 3), ce qui explique que la suite des moyennes mobiles de longueur 4 élimine la composante saisonnière et donne une évaluation de la tendance.

On peut envisager pour cette série chronologique un modèle additif ou un modèle multiplicatif.

### a) Schéma additif

Les calculs ont été effectués à l'aide du tableur Excel® (tableau 2). La synthèse des coefficients saisonniers a été réalisée par la moyenne, mais on pourrait aussi utiliser la médiane.

	<i>A</i>	<i>B</i>	<i>C</i>	<i>D</i>	<i>E</i>	<i>F</i>	<i>G</i>
<b>1</b>	<i>t</i>	<i>x<sub>t</sub></i>	<i>MM<sub>4</sub></i>	<i>x<sub>t</sub> - MM<sub>4</sub></i>	<i>s<sub>t</sub></i>	<i>s<sub>t</sub>*</i>	<i>CVS</i>
<b>2</b>	1	75,0			-9,7	-9,8	84,8
<b>3</b>	2	83,1			4,7	4,6	78,5
<b>4</b>	3	105,4	85,2	20,2	21,5	21,5	84,0
<b>5</b>	4	74,0	87,7	-13,7	-16,2	-16,3	90,3
<b>6</b>	5	81,7	90,1	-8,5	-9,7	-9,8	91,4
<b>7</b>	6	96,5	91,5	5,0	4,7	4,6	91,8
<b>8</b>	7	111,4	93,0	18,4	21,5	21,5	89,9
<b>9</b>	8	78,9	94,9	-16,0	-16,2	-16,3	95,2
<b>10</b>	9	88,9	97,5	-8,6	-9,7	-9,8	98,7
<b>11</b>	10	104,4	99,5	4,9	4,7	4,6	99,8
<b>12</b>	11	123,8	100,1	23,6	21,5	21,5	102,3
<b>13</b>	12	82,9	100,4	-17,5	-16,2	-16,3	99,2
<b>14</b>	13	90,0	100,8	-10,8	-9,7	-9,8	99,8
<b>15</b>	14	105,7	101,1	4,6	4,7	4,6	101,1
<b>16</b>	15	125,3	101,3	23,9	21,5	21,5	103,8
<b>17</b>	16	83,9	101,6	-17,8	-16,2	-16,3	100,2
<b>18</b>	17	91,1	102,1	-11,1	-9,7	-9,8	100,8
<b>19</b>	18	107,0	102,8	4,2	4,7	4,6	102,4
<b>20</b>	19	128,1			21,5	21,5	106,7
<b>21</b>	20	86,3			-16,2	-16,3	102,6
<b>22</b>					0,058		

Tableau 2 – Schéma additif : décomposition saisonnière

**Colonne C** : Calcul des moyennes mobiles de longueur 4  
 $C4 = (B2/2 + \text{SOMME}(B3:B5) + B6/2)/4$ , puis « recopier vers le bas ».

**Colonne D** : Différence entre valeurs observées et tendance  
 $D4 = B4 - C4$ , puis « recopier vers le bas ».  
 On obtient ainsi 4 évaluations de chaque coefficient saisonnier :  
 pour le 3<sup>ème</sup> trimestre, on a les 4 valeurs correspondant aux dates 3, 7, 11 et 15,  
 pour le 4<sup>ème</sup> trimestre, on a les 4 valeurs correspondant aux dates 4, 8, 12 et 16,  
 de même pour les 1<sup>er</sup> et 2<sup>ème</sup> trimestres.

**Colonne E** : On fait la synthèse des 4 valeurs associées à chaque trimestre par la moyenne.  
 $E4 = (D4 + D8 + D12 + D16)/4$   
 $E5 = (D5 + D9 + D13 + D17)/4$   
 $E6 = (D6 + D10 + D14 + D18)/4$   
 $E5 = (D7 + D11 + D14 + D19)/4$

⇒ premières valeurs des 4 coefficients saisonniers qu'on reporte sur toute la colonne à l'aide du « collage spécial », option « coller valeurs ».

**Colonne F :** La somme des coefficients saisonniers doit être nulle.  
 Leur moyenne a été calculée dans la cellule E22.  
 Calcul des coefficients saisonniers « normalisés » :  $F2 = E2 - \$E\$22$   
 puis « recopier vers le bas ».

**Colonne G :** Calcul de la série corrigée des variations saisonnières (série *CVS*)  
 $G2 = B2 - F2$ , puis « recopier vers le bas ».

### b) Schéma multiplicatif

Comme pour le modèle additif, les calculs ont été effectués à l'aide du tableur Excel® (tableau 3). La synthèse des coefficients saisonniers a été réalisée par la moyenne.

	<i>A</i>	<i>B</i>	<i>C</i>	<i>D</i>	<i>E</i>	<i>F</i>	<i>G</i>
<b>1</b>	$t$	$x_t$	$MM_4$	$x_t/MM_4$	$1+s_t$	$1+s_t^*$	<i>CVS</i>
<b>2</b>	1	75,0			0,90	0,90	83,4
<b>3</b>	2	83,1			1,05	1,05	79,4
<b>4</b>	3	105,4	85,2	1,24	1,23	1,22	86,1
<b>5</b>	4	74,0	87,7	0,84	0,83	0,83	89,2
<b>6</b>	5	81,7	90,1	0,91	0,90	0,90	90,8
<b>7</b>	6	96,5	91,5	1,05	1,05	1,05	92,2
<b>8</b>	7	111,4	93,0	1,20	1,23	1,22	90,9
<b>9</b>	8	78,9	94,9	0,83	0,83	0,83	95,1
<b>10</b>	9	88,9	97,5	0,91	0,90	0,90	98,9
<b>11</b>	10	104,4	99,5	1,05	1,05	1,05	99,9
<b>12</b>	11	123,8	100,1	1,24	1,23	1,22	101,1
<b>13</b>	12	82,9	100,4	0,83	0,83	0,83	99,8
<b>14</b>	13	90,0	100,8	0,89	0,90	0,90	100,1
<b>15</b>	14	105,7	101,1	1,05	1,05	1,05	101,1
<b>16</b>	15	125,3	101,3	1,24	1,23	1,22	102,3
<b>17</b>	16	83,9	101,6	0,83	0,83	0,83	101,0
<b>18</b>	17	91,1	102,1	0,89	0,90	0,90	101,3
<b>19</b>	18	107,0	102,8	1,04	1,05	1,05	102,3
<b>20</b>	19	128,1			1,23	1,22	104,6
<b>21</b>	20	86,3			0,83	0,83	104,0
<b>22</b>					1,0016		

Tableau 3 – Schéma multiplicatif : décomposition saisonnière

**Colonne C :** Calcul des moyennes mobiles de longueur 4  
 $C4 = (B2/2 + \text{SOMME}(B3:B5) + B6/2)/4$ , puis « recopier vers le bas ».

**Colonne D :** Quotient entre valeurs observées et tendance  
 $D4 = B4 / C4$ , puis « recopier vers le bas ».  
 On obtient ainsi 4 évaluations de chaque quantité ( $1 + s_t$ ) :  
 pour le 3<sup>ème</sup> trimestre, on a les 4 valeurs correspondant aux dates 3, 7, 11 et 15,  
 pour le 4<sup>ème</sup> trimestre, on a les 4 valeurs correspondant aux dates 4, 8, 12 et 16,  
 de même pour les 1<sup>er</sup> et 2<sup>ème</sup> trimestres.

**Colonne E :** On fait la synthèse des 4 valeurs associées à chaque trimestre par la moyenne.

$$E4 = (D4 + D8 + D12 + D16)/4$$

$$E5 = (D5 + D9 + D13 + D17)/4$$

$$E6 = (D6 + D10 + D14 + D18)/4$$

$$E7 = (D7 + D11 + D15 + D19)/4$$

⇒ premières valeurs des 4 coefficients saisonniers qu'on reporte sur toute la colonne à l'aide du « collage spécial », option « coller valeurs ».

**Colonne F :** La somme de ces 4 quantités doit être égale à 4.

Leur moyenne a été calculée dans la cellule E22.

Calcul des coefficients saisonniers « normalisés » :  $F2 = E2 / \$E\$22$

puis « recopier vers le bas ».

**Colonne G :** Calcul de la série corrigée des variations saisonnières (série *CVS*)

$G2 = B2 / F2$ , puis « recopier vers le bas ».

Pour cette chronique, les séries *CVS* calculées avec les deux modèles sont quasi-confondues (figure 4).

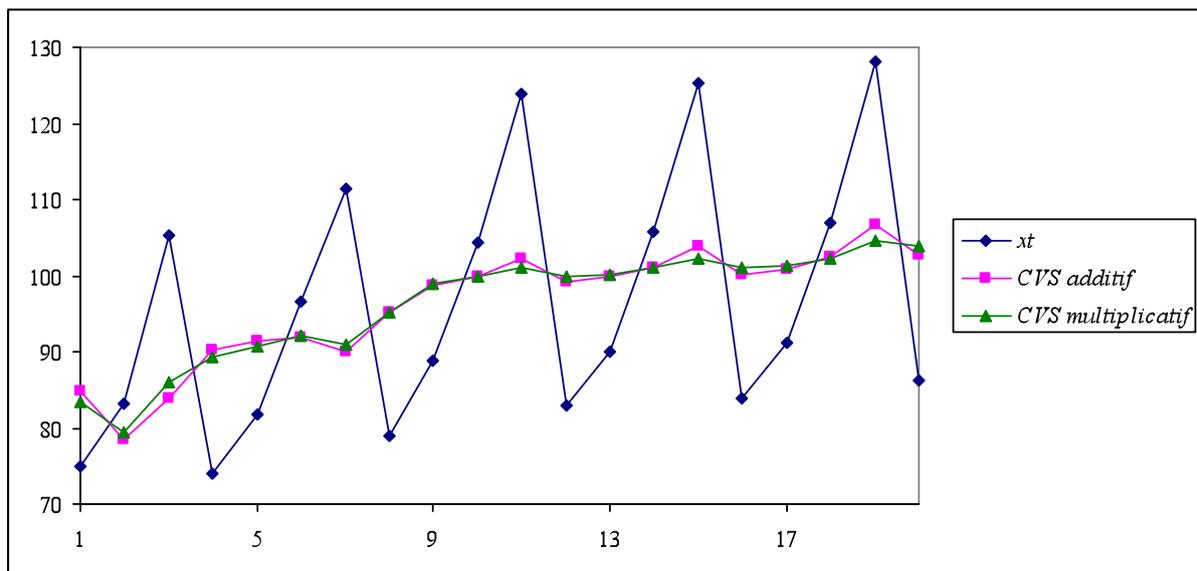


Figure 4 – Représentation de la chronique et des deux séries *CVS*

**Pour en savoir plus :**

Goldfarb B., Pardoux C. (2011) *Introduction à la méthode statistique*. DUNOD, Collection Economie Module, 6<sup>ème</sup> édition, chapitre 4.