Programmation linéaire : analyse de sensibilité – Exercices -corrigé

I – Reprendre l'exemple du cours et, avec le solveur, étudier les conséquences d'une variation du profit de l'IM5, le profit de l'IM4 restant fixé à 400€.

Max $z = 4\ x_1 + p_2\ x_2$
$x_1 + x_2 \leq 10$
$2\ x_1 + 6\ x_2 \leq 48$
$3x_1 + x_2 \leq 24$
$x_1,\ x_2 \geq 0$

Pour $p_2 = 8$ on a la solution $x_1 = 3\ \ x_2 = 7$ et $z^* = 68$
L'analyse de sensibilité suivante indique que si $8\text{-}4 \leq p_2 \leq 8 + 4$ soit $4 \leq p_2 \leq 12$ la solution est inchangée. Sur cet intervalle $z^* = 12 + 7\ p_2$

Cellules variables

Cellule	Nom	Finale Valeur	Réduit Coût	Objectif Coefficient	Admissible Augmentation	Admissible Réduction
\$B\$4	Variables x1	3	0	4	4	1,333333333
\$C\$4	Variables x2	7	0	**8**	**4**	**4**

Si $p_2 < 4$, on relance le solveur avec par exemple $p_2 = 3$.

Cellule	Nom	Finale Valeur	Réduit Coût	Objectif Coefficient	Admissible Augmentation	Admissible Réduction
\$B\$4	Variables x1	7	0	4	5	1
\$C\$4	Variables x2	3	0	**3**	**1**	**1,666666667**

Solution optimale $x_1 = 7\ \ x_2 = 3$ pour $4/3\ \leq p_2 \leq 4\quad z^* = 28 + 3\ p_2$

Si $p_2 < 4/3$ par exemple $p_2 = 1$, on obtient :

Cellules variables

Cellule	Nom	Finale Valeur	Réduit Coût	Objectif Coefficient	Admissible Augmentation	Admissible Réduction
\$B\$4	Variables x1	8	0	4	1E+30	1
\$C\$4	Variables x2	0	-0,333333333	1	0,333333333	1E+30

Solution optimale $x_1 = 8\ \ x_2 = 0$ pour $-\infty\ \leq p_2 \leq 4/3\ z^* = 32$

Si maintenant $p_2 > 12$:

Cellules variables

Cellule	Nom	Finale Valeur	Réduit Coût	Objectif Coefficient	Admissible Augmentation	Admissible Réduction
\$B\$4	Variables x1	0	-0,333333333	4	0,333333333	1E+30
\$C\$4	Variables x2	8	0	13	1E+30	1

Solution optimale $x_1 = 0\ \ x_2 = 8$ pour $12\ \leq p_2 \leq +\infty\ \ z^* = 8\ p_2$

On a donc ainsi 4 solutions possibles suivant la valeur de p_2.

II Suite de l'exercice III de la leçon "Résolution analytique d'un problème de programmation linéaire"
Après avoir résolu le problème, on dispose du rapport de résultats et de l'analyse de sensibilité fournis par Excel.
Rappel : le problème est le suivant :
Une entreprise produit 3 types d'articles P_1, P_2, P_3. Sa production hebdomadaire ne peut actuellement dépasser 500 pour le produit P_1, 200 pour le produit P_2 et 1 000 pour P_3. La fabrication de ces trois articles utilise une machine qui ne peut fonctionner plus de 45 heures par semaine, les différentes productions ne pouvant être simultanées. En 1 heure, on peut produire, soit 25 articles P_1, soit 10 articles P_2, soit 50 articles P_3. Les prix de vente unitaires des trois articles sont respectivement $p_1 = 24$, $p_2 = 40$ et $p_3 = 9$ (on peut vendre tout ce qu'on produit).
Il se modélise par :

$$\text{Max } (24 x_1 + 40 x_2 + 9 x_3)$$
$$x_1 \leq 500$$
$$x_2 \leq 200$$
$$x_3 \leq 1000$$
$$x_1/25 + x_2/10 + x_3/50 \leq 45$$
$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

Solution optimale $x_1 = 500$ $x_2 = 50$ $x_3 = 1000$ $z^* = 23\,000$

a) A partir de ces informations, pouvez-vous répondre aux questions suivantes :
Le prix du bien 1 augmente de 10%. Doit-on remettre en cause le plan de production ?

Cellules variables

Nom	Finale Valeur	Réduit Coût	Objectif Coefficient	Admissible Augmentation	Admissible Réduction
X1	500	0	**24**	**1E+30**	**8**

De ce résultat on déduit que si le prix du bien 1 augmente de 10% on ne change pas le plan de production

De combien devrait-on augmenter le prix du bien 2 pour qu'on puisse envisager de le produire à son maximum ?

Cellules variables

Nom	Finale Valeur	Réduit Coût	Objectif Coefficient	Admissible Augmentation	Admissible Réduction
X1	500	0	24	1E+30	8
X2	50	0	40	**5**	40

Pour que la solution change il faut impérativement que le prix du bien 2 augmente au minimum de 5.
Il faudra alors revoir le plan de production.
Pour connaître le nouveau plan on peut utiliser Excel. (voir feuille L8.exo3.cor.xls)
On obtient : $x_1 = 500$, $x_2 = 200$, $x_3 = 250$ c'est le bien 3 dont la production a diminué.

Si on voulait augmenter le nombre d'heures machines, quelle dépense pourrait-on envisager ?

Contraintes

Nom	Finale Valeur	Ombre Coût	Contrainte à droite	Admissible Augmentation	Admissible Réduction
Heures machine	45	**400**	**45**	**15**	**5**

De cette information on déduit que toute heure en plus rapporte un chiffre d'affaires supplémentaire de 400 (ce qui est normal puisqu'on peut l'utiliser pour produire du bien 2 à raison de 10 en 1 heure qui seront vendus à un prix de 40). Le coût dual représente ici la productivité marginale de l'heure de travail.
Ceci est valable tant que le nombre d'heures disponibles reste compris entre 45 – 5= 40 et 45 + 15= 60
Ce qui est aussi normal car sur cet intervalle, seul le nombre d'unités produites du bien 2 va varier : si le nombre d'unités du bien 1 variait il ne pourrait que diminuer et donc la contrainte 1 ne serait plus

saturée ce qui entraînerait un changement de structure de la solution. On sait que sur l'intervalle donné par cette analyse de sensibilité ce n'est pas le cas.
Il en est de même pour le bien 3.
Donc si on perd 5 heures, la production du bien 2 tombe à 0, en deçà il va falloir toucher à la production des autres biens. Si on dispose de 15 heures de plus, on peut alors produire le bien 2 au maximum (50 + 15*10 = 200).

b) Analyse de la variation du nombre d'heures-machine disponibles :
En utilisant le solveur d'Excel, étudier les conséquences sur le chiffre d'affaires et sur la nature de la production du nombre d'heures-machine disponible. Celui-ci peut varier de 0 (en cas de panne) à autant que l'on veut en faisant appel, par exemple, à des heures supplémentaires ou à toute autre mesure susceptible de se libérer de la contrainte portant sur les heures-machine.

On vient déjà d'étudier ce qui se passe lorsque le nombre d'heures varie entre 40 et 60.
S'il passe au-delà de 60, pour examiner la situation relançons le solveur avec un second membre de la contrainte portant sur les heures égal à 61.

Nom	Finale Valeur	Ombre Coût	Contrainte à droite	Admissible Augmentation	Admissible Réduction
Quantité max du bien 1	500	24	500	25	500
Quantité max du bien 2	200	40	200	10	200
Quantité max du bien 3	1000	9	1000	50	1000
Heures-machine	**60**	**0**	**61**	**1E+30**	**1**

Le coût dual (ombre coût) est nul : cela signifie que toute heure supplémentaire ne rapporte plus rien. Ce qui est normal puisqu'il suffit de 60 heures pour que les 3 biens soient produits à leur maximum.

Examinons la situation pour un nombre d'heures plus petit que 40. On sait déjà qu'il faudra changer la structure de la solution puisque la quantité produite du bien 2 est tombée à 0.
On relance le solveur avec un second membre de 39.

Nom	Finale Valeur	Ombre Coût	Contrainte à droite	Admissible Augmentation	Admissible Réduction
Quantité max du bien 1	500	6	500	475	25
Quantité max du bien 2	0	0	200	1E+30	200
Quantité max du bien 3	**950**	0	**1000**	1E+30	50
Heures-machine	39	**450**	**39**	**1**	**19**

On constate que le bien 3 n'est plus produit à son maximum (950 pour une capacité de 1000)
Toute heure en moins fait maintenant diminuer le chiffre d'affaires de 450, et ceci tant que le nombre d'heures disponibles restera compris entre 20 (39 – 19) et 40 (39 +1).

Si le nombre d'heures disponibles passe en dessous de 20, on a le résultat suivant :

Nom	Finale Valeur	Ombre Coût	Contrainte à droite	Admissible Augmentation	Admissible Réduction
Quantité max du bien 1	**475**	0	**500**	1E+30	25
Quantité max du bien 2	0	0	200	1E+30	200
Quantité max du bien 3	0	0	1000	1E+30	1000
Heures-machine	**19**	**600**	**19**	**1**	**19**

La quantité produite du bien 1 commence à diminuer et la perte sur le chiffre d'affaires est passée à 600 par heure.

En résumé lorsque le nombre d'heures-machine (H) augmente la productivité marginale (ombre coût) varie de la manière suivante :
$0 \leq H \leq 20$ productivité de 600
$20 < H \leq 40$ productivité de 450
$40 < H \leq 60$ productivité de 400

60 < H productivité nulle
"Plus on à d'heures moins elles rapportent" ! on retrouve le vieil adage que le prix d'un bien rare est cher !

c) De la même manière, dans quelle mesure doit-on entreprendre des actions pour augmenter la capacité hebdomadaire de production de chacun des produits ?

Contraintes

Nom	Finale Valeur	Ombre Coût	Contrainte à droite	Admissible Augmentation	Admissible Réduction
Quantité max du bien 1	500	**8**	500	125	375
Quantité max du bien 2	50	**0**	200	1E+30	150
Quantité max du bien 3	1000	**1**	1000	250	750

L'examen du coût dual montre que l'augmentation d'une unité de la capacité de production du bien 1 rapporterait 8 et ceci tant qu'elle ne dépasse pas 625.
Pour le bien 3, cela ne rapporte que 1 par unité et ceci tant que la capacité ne dépasse pas 1250.
Quant au bien 2 cela ne rapporte rien, ce qui est normal puisqu'il n'est pas produit actuellement au maximum.

NB : les données de ce problème sont particulièrement simples afin que l'on puisse expliquer (et même les trouver directement) les résultats issus d'Excel, mais il va de soi que dans un problème plus compliqué on ne peut s'en sortir sans avoir recours à un outil de calcul.