Introduction à la programmation linéaire– Exercices -corrigé

I Dans un élevage de porcs, on souhaite déterminer les quantités de différents........

Les variables de décision :
Poids de mais (en kilos) : QM
Poids de petit lait : QPL
Poids de végétaux : QV

Les contraintes :
Quantité minimum de glucides 9 QM + 2 QPL + 4 QV ≥ 20
Quantité minimum de protéine : 3 QM + 8 QPL + 6 QV ≥ 18
Quantité minimum de vitamine : 4 QM + 6 QPL + 6 QV ≥ 15

L'objectif
Min (7 QM + 6 QPL + 5 QV)

Bilan :
Min (7 QM + 6 QPL + 5 QV)
9 QM + 2 QPL + 4 QV ≥ 20
3 QM + 8 QPL + 6 QV ≥ 18
4 QM + 6 QPL + 6 QV ≥ 15
QM, QPL, QV ≥ 0

II Une raffinerie souhaite déterminer les quantités de deux types......

Les variables
XE quantité d'essence
XF quantité de fuel lourd

Il faut aussi déterminer la composition de l'essence.
YB, YR, YN représentent les quantités de butane, reformat et naphta qui seront utilisées.
Toutes ces variables sont positives.

Contraintes :
Contrainte portant sur le butane
1) YB ≤ 1000
Contrainte portant sur la quantité totale à produire
2) XE + XF ≤ 12000
Contrainte liant la quantité d'essence produite et celles des composants utilisés
3) XE = YB + YR + YN

Contraintes portant sur la qualité de l'essence
- Indice d'octane
4) 120 *YB/XE + 100 *YR/XE+ 74*YN/XE≥ 94 *(YB/XE représente le pourcentage de butane dans l'essence)*
- Pression
5)60 *YB/XE+2,6 *YR/XE+ 4,1 *YN/XE≤ 11
- Volatilité
6) 105 *YB/XE+3 *YR/XE+ 12 *YN/XE≥ 17

L'objectif
Maximisation de la marge totale
3,6 * XF + 18,4 * XE - (7,3* YB + 18,2 * YR + 12,5 * YN)

Après réécriture des contraintes 4, 5 et 6 pour les linéariser on obtient le problème :

$$
\begin{array}{lllllll}
\text{Max } 3{,}6\,XF & +\,18{,}4\,XE & -\,7{,}3\,YB & -\,18{,}2\,YR & -\,12{,}5\,YN & & \\
 & & YB & & & \leq & 1000 \\
XE & +\,XF & & & & \leq & 12000 \\
XE & & -YB & -\,YR & -\,YN & = & 0 \\
-\,94\,XE & & +\,120\,YB & +\,100\,YR & +\,74\,YN & \geq & 0 \\
-11\,XE & & +\,60\,YB & +\,2{,}6\,YR & +4{,}1\,YN & \leq & 0 \\
-\,17\,XE & & +\,105\,YB & +\,3\,YR & +\,12\,YN & \geq & 0 \\
\end{array}
$$

$XE, XF, YB, YR, YN \geq 0$

III Le nombre d'employés nécessaires dans le ......

Les variables de décision :
On numérote les différentes périodes.
Les employés venant pour 2 périodes consécutives, il s'agit de déterminer le nombre de personnes arrivant au début de chaque période : x_t $t = 1$ à 6.

Les contraintes :
Il faut disposer sur chaque période d'un nombre de personnes au moins égal à la charge à couvrir. Chaque période est couverte par 2 populations différentes : ceux qui viennent d'arriver et ceux qui étaient arrivés à la période précédente. D'où les contraintes :

$$
\begin{array}{lllllll}
x_1 & & & & & +\,x_6 & \geq 20 \\
x_1 & +\,x_2 & & & & & \geq 50 \\
 & x_2 & +\,x_3 & & & & \geq 80 \\
 & & x_3 & +\,x_4 & & & \geq 100 \\
 & & & x_4 & +\,x_5 & & \geq 40 \\
 & & & & x_5 & +\,x_6 & \geq 30 \\
\end{array}
$$

L'objectif
Les employés arrivant au début de chaque période sont tous différents (sauf à les faire venir une deuxième fois au cours de la même journée), il y en a donc :
$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6$

Bilan :

Min $(x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6)$

$$
\begin{array}{lllllll}
x_1 & & & & & +\,x_6 & \geq 20 \\
x_1 & +\,x_2 & & & & & \geq 50 \\
 & x_2 & +\,x_3 & & & & \geq 80 \\
 & & x_3 & +\,x_4 & & & \geq 100 \\
 & & & x_4 & +\,x_5 & & \geq 40 \\
 & & & & x_5 & +\,x_6 & \geq 30 \\
\end{array}
$$

$x_t \geq 0$ $t = 1, ..,6$

IV - Le graphe ci-dessous représente le réseau de distribution d'une firme ....

Les variables de décision :
Quantités transportées entre les usines et les entrepôts : QAX, QAY .....
Et entre les entrepôts et les magasins : QX1, QX2....
Il y a donc 9 variables.

Les contraintes :
Contraintes aux usines : on ne peut faire partir une quantité supérieure à celle dont on dispose.
QAX + QAY : ce qui part de A
$QAX + QAY \leq 100$
De même pour B
$QBX + QBY \leq 80$

Contraintes des clients : Ils doivent recevoir la quantité demandée :
QX1 + QY1 = ce qui arrive au client 1 :
$QX1 + QY1 = 30$
Pour le client 2
$QX2 + QY2 = 50$
Pour le client 3
$QY3 = 60$

Contraintes des entrepôts :
Il faut aussi "dispatcher " ce qui arrive dans les entrepôts vers les clients, sachant que tout ce qui arrive part.
QAX + QBX = ce qui arrive en X
QX1 + QX2 = ce qui part de X
$QAX + QBX = QX1 + QX2$

De même en Y :
$QAY + QBY = QY1 + QY2 + QY3$

L'objectif
Minimisation du coût total, dans l'hypothèse où sur chaque tronçon le coût est proportionnel aux quantités transportées.
$\text{Min}(QAX + 2QAY + 3\,QBX + QBY + 5\,QX1 + 7\,QX2 + 6\,QY1 + 9\,QY2 + 7\,QY3)$

Bilan

$\text{Min}(QAX + 2QAY + 3\,QBX + QBY + 5\,QX1 + 7\,QX2 + 6\,QY1 + 9\,QY2 + 7\,QY3)$

QAX	+ QAY								≤ 100
		QBX	+ QBY						≤ 80
				QX1	+ QY1				= 30
						QX2	+ QY2		= 50
								QY3	= 60
- QAX		- QBX		+ QX1		+ QX2			=0
	- QAY		- QBY		+ QY1		+ QY2	+ QY3	= 0

$QAX , QAY , QBX , QBY , QX1 , QX2 , QY1 , QY2 , QY3 \geq 0$

V- Une entreprise produits 3 biens A, B et C. Ces biens peuvent être vendus en ....

Les variables de décision

Plusieurs formulations sont possibles suivant que l'on introduit les quantités vendues et/ou les quantités produites, ces variables étant bien sûr liées entre elles.
Par exemple avec les quantités produites :
q_A= quantité de A produite
q_B= quantité de B produite
q_C = quantité de C produite
Toutes ces variables sont positives

Les contraintes :
Contrainte portant sur les heures :
$q_A + 2 q_B + 3 q_C \leq 40$

La production de B utilisant du A, il faut avoir suffisamment de A pour produire du B :
Puisqu'il faut 2 unités de A pour une unité de B on doit imposer $q_A \geq 2 q_B$.

De même entre B et C :
$q_B \geq q_C$
`
Objectif

La quantité de A vendue est égale à la quantité produite q_A moins la quantité utilisée pour B : $2q_B$.
De même pour B .
D'où le chiffre d'affaires :
$10 (q_A - 2 q_B) + 56 (q_B - q_C) + 100 q_C = 10 q_A + 36 q_B + 44 q_C$

Bilan

Max $10 q_A + 36 q_B + 44 q_C$
$q_A + 2 q_B + 3 q_C \leq 40$
$q_A - 2 q_B \geq 0$
$q_B - q_C \geq 0$
$q_A , q_B , q_C \geq 0$

VI - Une entreprise souhaite déterminer parmi n........

$\sum_{j=1}^{n} a_{tj} x_j$ représente ce qui est dépensé pour le projet en période t moins ce qui est récupéré ($a_{tj} <0$) : c'est ce qu'il faut financer.

Le financement est fait par ressources propres s_t mais aussi par les emprunts .
Au cours d'une période, on peut placer une somme y_t (≥ 0) qui est alors considérée comme une dépense supplémentaire.
Au contraire si on emprunte ($y_t \leq 0$) la somme permet un financement complémentaire.
Ces sommes placées ou empruntées à la période t-1 devront être récupérées ou remboursées à la période t au niveau $(1+r)\, y_{t-1}$.
D'où la contrainte :

$$\sum_{j=1}^{n} a_{tj}\, x_j - (1+r)\, y_{t-1} + y_t \;\leq\; s_t \quad t = 2,\ldots,T$$

Pour t = 1 , le terme y_0 est nul.

$0 \leq x_j \leq 1$ correspond à la définition de x_j qui est la fraction du projet mise en oeuvre.

Pour l'objectif

$\sum_{j=1}^{n} c_j\, x_j$ représente la somme des cash-flow actualisés à la date T si chaque projet est mis en oeuvre au niveau x_j .

On lui ajoute ce qui reste des prêts et des emprunts ; $y_T > 0$ indique un placement alors que $y_T < 0$ indique une somme à rembourser.

VII Une entreprise fabrique deux produits différents P_1, P_2 à partir de trois........

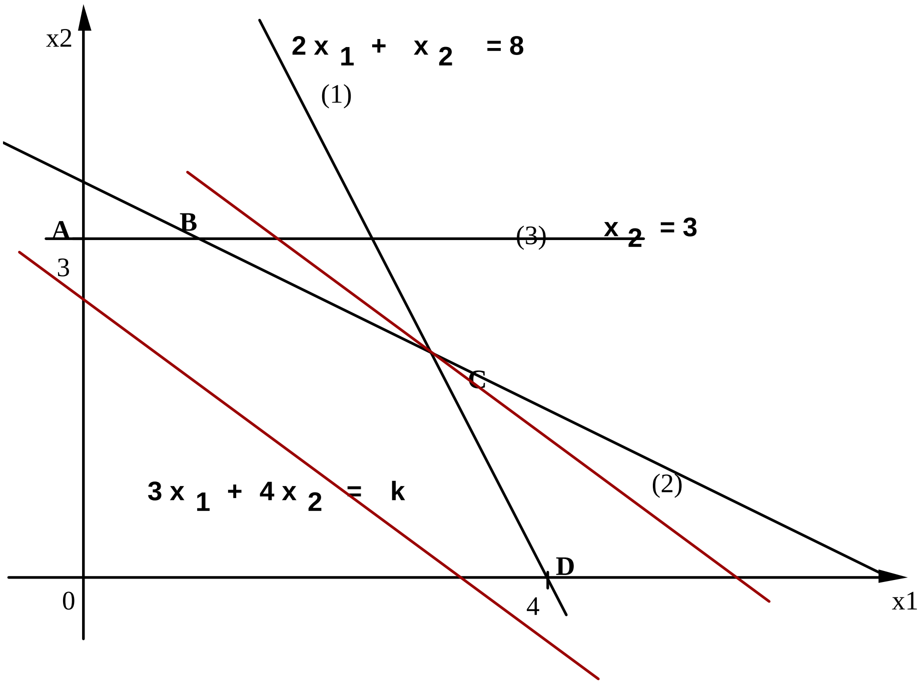
Max ($3\,x_1 + 4\,x_2$)

$2\,x_1 + x_2 \le 8$

$x_1 + 2\,x_2 \le 7$

$x_2 \le 3$

$x_1\ ,\ x_2 \ge 0$



L'examen des pentes des droites associées aux contraintes et celle associée à la fonction objectif montre que la solution optimale est obtenue au point C, intersection des contraintes (1) et (2) :

$x_1 = 3$ $x_2 = 2$ chiffre d'affaires maximum = 17

Les ressources 1 et 2 sont intégralement utilisées.

c) Si le prix du bien 1 varie, graphiquement cela se traduit par le modification de la pente de la droite représentant la fonction objectif dont l'équation devient $p_1\,x_1 + 4\,x_2 = k$.

La pente de la droite associée à la contrainte (1) est en valeur absolue de 2 celle associée à la contrainte (2) est en valeur absolue de 1/2.

Donc si $1/2 \le p_1/4 \le 2$ ($2 \le p_1 \le 8$) la solution optimale est encore associée au point C.

Si $p_1 \ge 8$, la solution optimale est associée au point D.

Si $0 \le p_1 \le 2$, la solution optimale est associée au point B.

Pour $p_1 = 8$ tous les points du segment CD correspondent à des solutions optimales

Pour $p_1 = 2$ tous les points du segment BC correspondent à des solutions optimales

d) L'acquisition d'une unité supplémentaire de la ressource 1 se traduit par la modification du second membre de la première contrainte qui devient :

$2x_1 + x_2 \quad <= 8 + 1$

Graphiquement la droite (1) se déplace parallèlement à elle-même "vers le haut".

Les pentes des droites (1) et (2) ainsi que celle de la droite représentant la fonction objectif ne changeant pas, la solution optimale reste à l'intersection des droites (1) et (2) et vérifie donc :

$2x_1 + x_2 \quad = 9$

$x_1 + 2x_2 \quad = 7$

La nouvelle solution optimale est donnée par :

$x_1 = 11/3 = 3 + 2/3$) $x_2 = 5/3 = 2 - 1/3$ chiffre d'affaires maximum = 3 * 11/3 + 4 * 5/3 = 17 +2/3

On a donc un nouveau plan de production qui conduit à une augmentation de 2/3 du chiffre d'affaires ; on peut donc accepter de payer cette unité supplémentaire à un prix maximum de 2/3.