**Résolution des problèmes de plus court chemin – exercices- corrigé**

I Le graphe qui permet de modéliser ce problème est analogue à celui vu dans le cours.
C'est un graphe de 7 sommets numérotés de 0 à 6.
Les arcs sont tous les arcs possibles de i à j avec j>i.
L'arc (i, j) correspond à l'acquisition d'un véhicule en début de période i+1 et à sa revente en fin de période j.
Le coût correspondant à cet arc est donné par :
Prix d'achat + entretien sur les périodes i+1, ..., j - Revente en fin de période j

Compte tenu des valeurs numériques les coût $c_{ij}$ des arcs (i, j) sont donnés dans le tableau suivant :
(Il suffit de calculer la première ligne qui correspond à ce qu'il en coûte de garder le véhicule 1, 2 ...ou 6 ans puisque les coûts ne dépendent pas de la période)

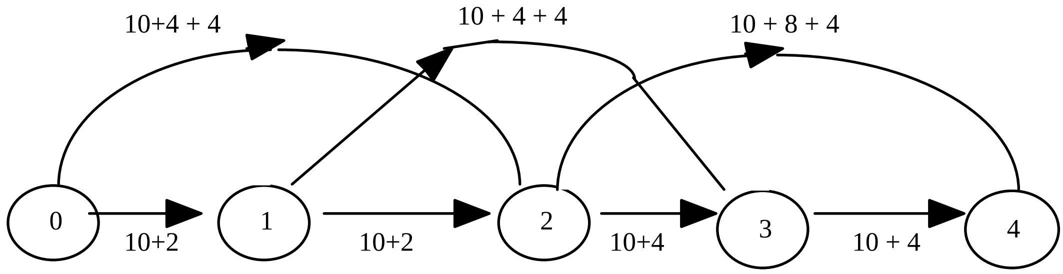
| | *1* | *2* | *3* | *4* | *5* | *6* |
|---|---|---|---|---|---|---|
| *0* | 6600 | 9 600 | 15 200 | 19 600 | 24 800 | 31 200 |
| *1* | | 6600 | 9 600 | 15200 | 19600 | 24800 |
| *2* | | | 6600 | 9 600 | 15200 | 19600 |
| *3* | | | | 6600 | 9 600 | 15200 |
| *4* | | | | | 6600 | 9 600 |
| *5* | | | | | | 6 600 |
| *6* | | | | | | |

Le graphe obtenu est sans circuit. Pour résoudre le problème on peut appliquer l'algorithme de Bellman.
Sommet 0 : $\lambda(0) = 0$
Sommet 1 : $\lambda(1) = 6600$ père(1) = 0
Sommet 2 : 2 prédécesseurs 0 et 1 $\lambda(2)$ = Min ( 9600, 6600+6600 ) = 9600 père(2) = 0
Sommet 3 : 3 prédécesseurs, $\lambda(3)$ = Min ( 15 200, 6 600+ 9 600 , 9 600 + 6 600) = 15 200 père(3) = 0
Sommet 4 : 4 prédécesseurs , $\lambda(4)$ = Min ( 19 600, 6600 + 15 200, 9 600 + 9600, 15 200 + 6 600 ) = 19 200 père(4) = 2
Sommet 5 : 5 prédécesseurs
$\lambda(5)$ = Min ( 24 800 , 6 600 + 19 600, 9600 + 15 200, 15 200 + 9 600, 19 200 + 6 600 ) = 24 800
Père (5) = 0, 2 ou 3
Sommet 6 : 6 prédécesseurs
$\lambda(6)$ = Min ( 31200, 6 600 + 24 800, 9 600 + 19 600, 15 200 + 15 200, 19 200 + 9 600 , 24 800 + 6 600 )
= 28 800
Père(6) = 4

Par exemple, pour le sommet 3, on calcule :
Min($\lambda$ (0) +l(0,3) , $\lambda$ (1) +l(1,3) , $\lambda$ (2) +l(2,3) )
$\lambda$ (0) $\lambda$ (1 ) $\lambda$ (2) ont été calculés auparavant.
$\lambda$ (0) = 0 $\lambda$ (1) = 6600 $\lambda$ (2)= 9 600
Les longueurs l(i,j) sont lues dans le tableau.

Finalement le coût minimal est de 28 800.
Pour cela il faut garder le dernier véhicule 2 ans (père(6) =4) , le précédent 2 ans ( père(4) = 2) et le premier 2 ans.
Donc la politique optimale sur 6 ans, avec cette structure de coût, est de remplacer le véhicule tous les 2 ans.

II Dans le cas a) comme dans le cas b) le graphe est sans circuit. Pour résoudre le problème on utilise l'algorithme de Bellman.
On passe les sommets dans l'ordre chronologique, ce qui fait que chacun est examiné après ses prédécesseurs.
Dans le premier cas le calcul est fastidieux. Il est beaucoup plus rapide dans le second.
Il faut d'abord calculer le coût associé à chaque arc.




Par exemple pour (1,3) :
Coût fixe 10
Coût variable : 4 unités avec un coût unitaire de production de 1
Coût de stockage : 2 unités avec un coût unitaire de stockage de 2
Pour (2,4 ) : idem sauf que le coût unitaire de production est passé à 2.

Application de l'algorithme de Bellman :

$\lambda(0) = 0$
$\lambda(1) = 12$ père(1) = 0
$\lambda(2) = \text{Min}(12 + \lambda(1), 18) = \text{Min}(24, 18) = 18$ père(2) = 0
$\lambda(3) = \text{Min}(18 + \lambda(1), 14 + \lambda(2)) = \text{Min}(30, 32) = 30$ père(3) = 1
$\lambda(4) = \text{Min}(22 + \lambda(2), 14 + \lambda(3)) = \text{Min}(40, 44) = 40$ père(4) = 2

Le coût de la politique optimale est de 40.
4 a pour père 2 qui a pour père 0.
Le plus court chemin de 0 à 4 est le chemin 0 – 2 - 4.
Il faut produire 4 unités en période 1 et 4 unités en période 3.

III Les longueurs sont positives, on pourrait appliquer l'algorithme de Moore Dijkstra, mais on peut vérifier que ce graphe est sans circuit auquel cas il vaut mieux appliquer l'algorithme de Bellman qui est plus performant.
L'ordre d'examen des sommets est :
s, a, d, g, b, e, h, p
*(Conseil : indiquer à côté de chaque sommet les différentes étiquettes)*
On trouve :

| | s | a | d | g | b | e | h | p |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\lambda(x)$ | 0 | 1 | 2 | 4 | 4 | 6 | 6 | 7 |
| Père(x) | // | s | s | s | a | d | g | h |

2 – Pour déterminer le plus long chemin, il faut remplacer max par min. On trouve :

| | s | a | d | g | b | e | h | p |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\lambda(x)$ | 0 | 1 | 3 | 6 | 10 | 14 | 16 | 17 |
| Père(x) | // | s | a | d | d | b | e | e ou h |

3 – Pour déterminer le chemin dont la difficulté maximale est la plus faible possible, on utilise le même type de raisonnement que dans les 2 cas précédents.
Par exemple, si on a un chemin dont la difficulté maximale pour arriver en b est de 3 , la difficulté maximale pour arriver jusqu'en p **en passant par b** sera de max( 3, 5).
On prendra bien sûr pour arriver en b le chemin dont la difficulté maximale est la plus faible possible.

Pour calculer la difficulté maximale la plus faible possible $\lambda(x)$ pour arriver à un sommet, il suffit de connaître la difficulté maximale la plus faible possible $\lambda(y)$ pour arriver à chacun de ses prédécesseurs et comparer avec la difficulté du dernier arc.

D'où la formule à appliquer :
$\lambda(x) = \min ( \max(\lambda(y), l(y,x) )$ le min étant pris sur tous les prédécesseurs y de x.

On a remplacé la somme de $\lambda(y)$ et $l(y,x)$ par le max de $\lambda(y)$ et $l(y,x)$.
On obtient :

| | s | a | d | g | b | e | h | p |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\lambda(x)$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 3 | 4 | 3 | 3 |
| Père(x) | // | s | s ou a | d | a | d ou b | g | h |

Par exemple, on peut arriver en p avec une difficulté qui ne dépasse pas 3.
Pour arriver en p, il faut venir de h , puis de g , puis de d puis de s ou de a.
s d g h p est un chemin dont la difficulté maximale est de 3 et c'est la plus faible possible.

IV Le graphe possède un circuit et des arcs de longueur négative.
On peut appliquer l'algorithme de Ford-Bellman.

| | a | b | c | d | e | f |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Initialisation | 0 | $+\infty$ | $+\infty$ | $+\infty$ | $+\infty$ | $+\infty$ |
| Itération1 | // | 4(a) | 1(a) | 2(b) | 5(b) | 5(d) |
| Itération 2 | // | 2(c) | -- | 0(b) | 3(b) | 3(d) |
| Itération 3 | // | -- | -- | -- | -- | -- |

A chaque itération on passe en revue tous les sommets et on compare leur marque à celle de leurs prédécesseurs.
On s'arrête lorsqu'aucune marque n'est modifiée.