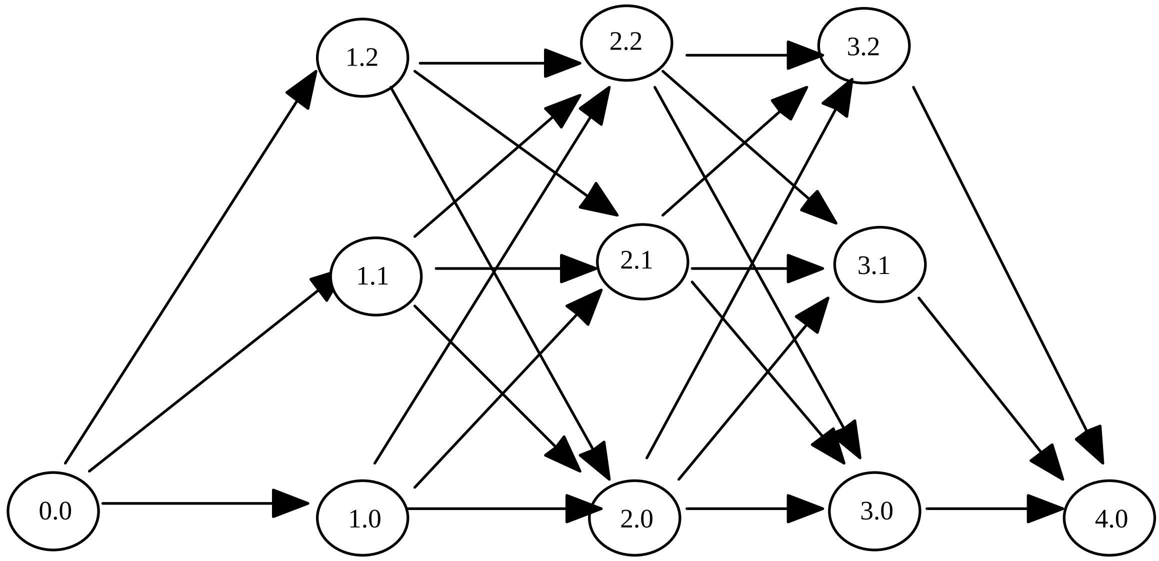
Le problème du plus court chemin : exercices- corrigé

I



Les sommets correspondent à l'état du stock à la fin de chaque période : par hypothèse, il peut être de 0, 1 ou 2.
Les arcs sont associés aux décisions.
Initialement, le stock est nul. On doit produire 2, 3 ou 4 unités pour faire face à la demande.
Selon le cas, on terminera la première période avec un stock de 0, 1 ou 2 unités.

On fait de même pour chaque sommet.
Par exemple : le sommet 1.1 correspond à une unité en stock à la fin de la première période.
Compte tenu de la demande de 2, il faut produire 1, 2 ou 3 unités.
On se retrouvera avec 0, 1 ou 2 unités en stock, en fin de période 2 d'où les 3 arcs :
1.1 -> 2.0 (production d'une unité)
1.1 -> 2.1 (production de 2 unités)
1.1 -> 2.2 (production de 3 unités)

La valuation des arcs doit tenir compte des différents coûts :
On note :
- K_t = coût fixe de la période t
- c_t = coût de production unitaire de la période t
- h_t = coût unitaire de stockage de la période t

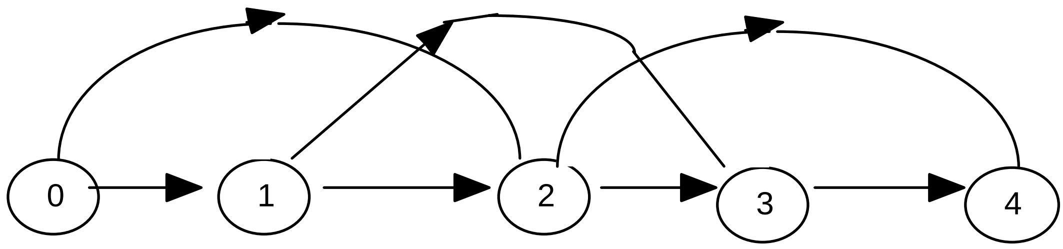
Pour un arc de (t-1, i) à (t , j), les coûts sont les suivants :
- Si j = i – 2 il n'y a pas eu de production, le stock a diminué de la demande, sinon il faut compter un coût de K_t
- Quantité produite lorsque j > i-2 : 2 + (j - i) donc coût variable de production : c_t (2 + j-i)
- Coût de stockage = h_t i

Par exemple en période 2 :
(1,0) -> (2,0) : $K_2 + 2\ c_2$ on produit 2 unités – pas de stock à la fin
(1,0) -> (2,1) : $K_2 + 3\ c_2 + h_2\ c_2$ on produit 3 unités – une unité en stock à la fin
(1,0) -> (2,2) : $K_2 + 4\ c_2 + 2\ h_2$ on produit 4 unités – deux unités en stock à la fin

(1,2) -> (2,0) : 0 on ne produit pas – pas de stock à la fin
(1,2) -> (2,1) : $K_2 + c_2 + h_2$
(1,2) -> (2,2) : $K_2 + 2\ c_2 + 2\ h_2$

Il n' y a plus qu'à remplacer par les valeurs numériques.

b) Dans ce cas, puisqu'on fait l'hypothèse qu'on ne produit que lorsque le stock s'est annulé, on peut modéliser le problème en considérant comme décision à prendre le nombre de périodes pour lesquelles on doit produire.
La production ayant, sur cet exemple, été limitée à 4 unités, on a le schéma suivant :



Un arc (t , t') correspond à la décision de produite à la t+1ème période la quantité nécessaire pour couvrir la demande des périodes t +1 à t'.

Le coût associé est égal à la somme du coût fixe, du coût variable de production et du coût de stockage:

Par exemple, pour l'arc (1,2) : $K_2 + 2\ c_2$, pour l'arc (1,3) : $K_2 + 4\ c_2 + 2\ h_2$

NB : On peut sans peine généraliser ceci dans le cas où la quantité demandée dépend de la période.

II Soient 3 tailles i , j , k avec i < j < k , on exclut d'office, ce qui ne serait sûrement pas optimal, de fabriquer une taille i dans une taille k si la taille j est fabriquée !
Le regroupement de commandes concernera donc des tailles consécutives.
On peut alors représenter le problème en considérant comme décisions les suites de taille à regrouper.
Ceci peut se représenter par un graphe dont les sommets correspondent à la taille des différentes boites rangées par ordre croissant, complété par un sommet 0.
Un arc allant du sommet i au sommet j indique que toutes les tailles commandées entre i+1 et j sont livrées en taille j.
Par exemple, l'arc (0,1) correspond à la demande pour la taille 1 fabriquée en taille 1.
L'arc (1,4) correspond à la demande pour les tailles 2, 3 et 4 fabriquées en taille 4.

Tous les arcs (i,j) avec j>i sont susceptibles d'exister.
(Le graphe est exactement du même type que celui de remplacement de véhicule vu dans le cours).

Le coût associé à l'arc (i,j) comprend :
- le coût fixe associé à la production de la taille j
- le coût variable : nombre total de boites fabriquées pour les tailles de i+1 à j, multiplié par le coût de fabrication d'une boite de type j.

Exemple :
Arc (0,1) : 2000 + 200*34
Arc (1,4) : 2000 + (400+200+700) *48

Une fois le graphe décrit, il suffit de d'appliquer l'algorithme adapté pour résoudre le problème.

III S = sommets à examiner dont la marque est finie (on ne peut choisir un sommet de marque infinie)

S	Sommet choisi	a	b	c	d	e	f	g	h
		0	+ ∞	+ ∞	+ ∞	+ ∞	+ ∞	+ ∞	+ ∞
a	a	//	4(a)	2(a)	1(a)				
b, c, d	d				//			7(d)	
b, c, g	c		3(c)	//			4(c)		
b, f, g	b		//			8(b)			
f, g, e	f						//	6(f)	6(f)
g, e , h	g							//	
e,h	h					7(h)			//
e	e					//