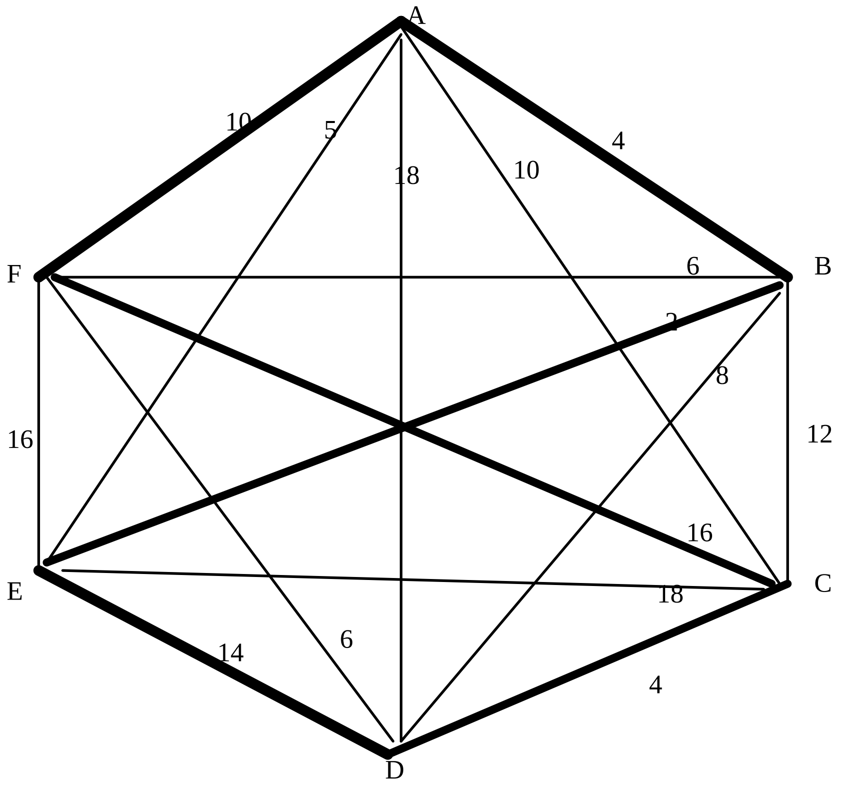
Introduction aux problèmes combinatoires difficiles- Exercices- corrigé

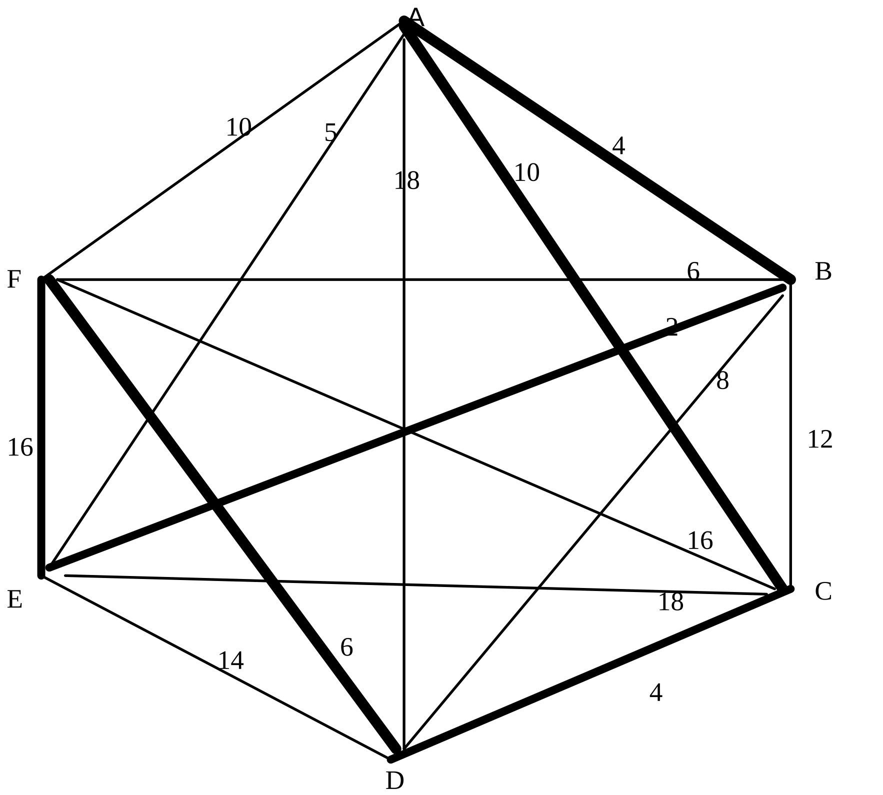


Plus proche voisin

On part de A
AB 4
BE 2
on ne peut prendre ni EB ni EA
ED 14
DC 4
CF 16
on ne peut prendre ni CD ni CB ni CA
FA 10 retour obligé

On obtient la tournée ABEDCFA

Coût total 50



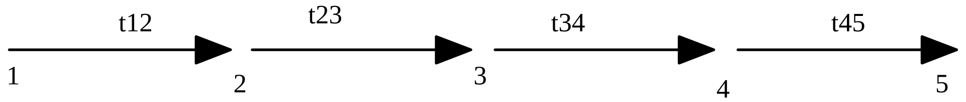
On classe les arêtes par ordre de coût croissant et on les sélectionne de manière à former ni cycle, ni fourche (sommet de degré 3)
BE 2
AB 4
CD 4
AE 5 impossible
BF 6 impossible
DF 6
BD 8 impossible
AC 10

On ferme par EF 16
On obtient la tournée ABEFDCA
Coût total 42

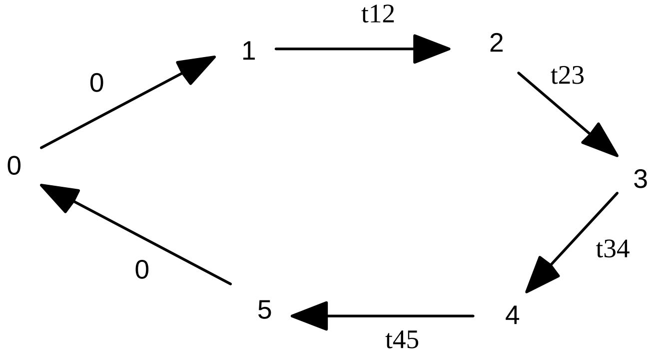
Toute tournée aura une longueur au moins égale à la somme des 6 plus petites longueurs. On a une minoration de la longueur des tournées qui est égale à : 2 + 4 + 4 + 5+ 6+ 6 = 27
On peut donc en déduire que la solution optimale a une longueur comprise entre 27 et 42.
En fait la tournée optimale est la tournée AEBFDCA de longueur 33.

II En vue de la préparation d'une importante réunion, ...

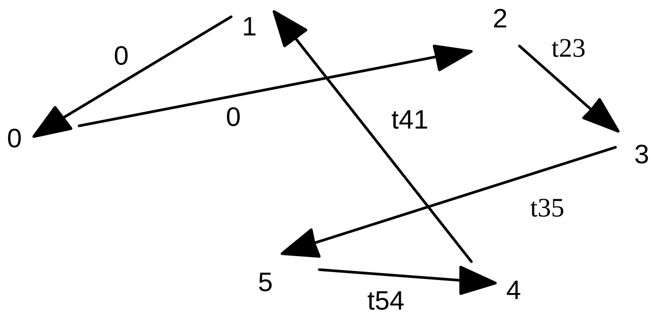
Le temps total de lecture est indépendant de l'ordre dans lequel les documents passent. On ne doit donc se préoccuper que des temps de transmission.
Il s'agit de trouver une permutation des n personnes.
Par exemple, pour 5 personnes dans l'ordre 1,2,3,4,5 le temps de transmission est $t_{12} + t_{23} + t_{34} + t_{45}$



Sous cette forme, il ne s'agit pas de trouver un circuit passant par tous les sommets mais une **chaîne** reliant tous les sommets.
Pour se ramener au problème standard du voyageur de commerce, on ajoute un sommet "0" avec un temps t_{0I} = 0 pour i = 1....,n qui mesure le temps de remise du document au premier élément de la chaîne et t_{i0} = 0 qui mesure le temps de transmission à partir du dernier élément de la chaîne. Ce temps a été supposé nul puisque la dernière personne, quelle qu'elle soit, garde le document.
On a donc maintenant à chercher le **circuit** le plus court passant par les sommets 0, 1...., n.

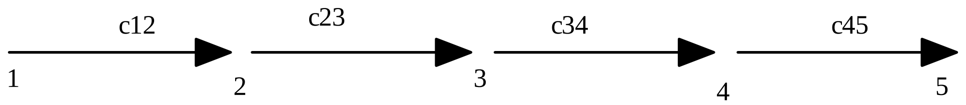


Exemple avec l'ordre 1,2,3,4,5

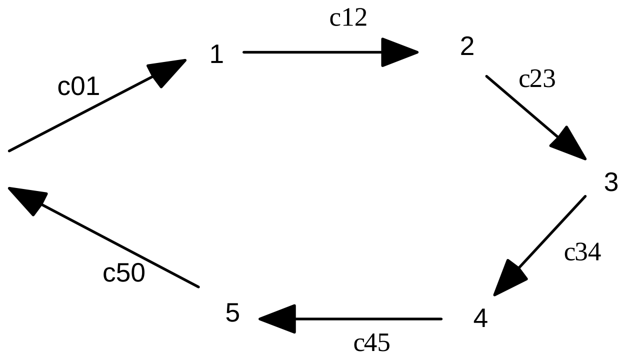


Exemple avec l'ordre 2, 3, 5, 4, 1

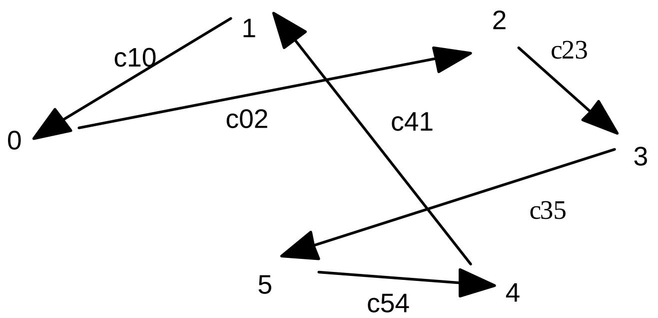
III *On considère un long rouleau de papier peint ......*
Comme dans l'exercice précédent, on se ramène facilement à un problème de voyageur de commerce.
Si on considère 5 morceaux mis dans l'ordre 1,2,3,4,5



$c_{12} + c_{23} + c_{34} + c_{45}$ représente la chute entre les morceaux, mais il faut tenir compte aussi de la chute avant le premier morceau et la chute après le dernier morceau.
Pour cela on introduit un morceau fictif noté "0". Les arcs (0,i) seront valués par c_{0i} =chute initiale si le morceau i est placé en premier et les arcs (i,0) seront valués par c_{i0} = chute finale si le morceau i est placé en dernier.



Exemple avec l'ordre 1,2,3,4,5



Exemple avec l'ordre 2,3,5,4,1

IV On construit le graphe avec les sommets représentant les pays et les arcs reliant 2 pays s'ils ont une frontière commune.
On procède à la coloration en examinant les sommets dans l'ordre de degré décroissant.
Ordre des couleurs : Rouge, bleu, vert, jaune

A (Allemagne) de degré 8 : rouge

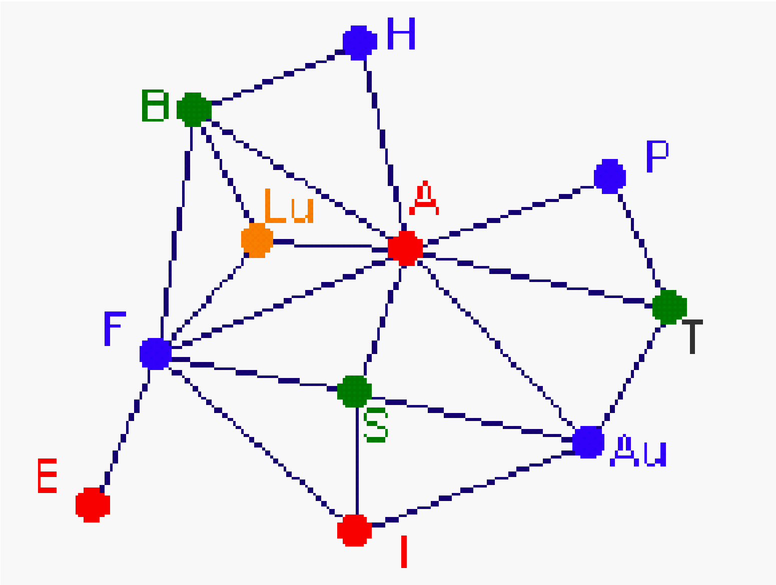
F (France) degré 6 : Bleu (rouge impossible)

B, S et Au sont de degré 4
B ne peut prendre que la troisième couleur : vert
S : vert
Au : première couleur possible : Bleu

Sommets de degré 3 : Lu et I
Lu : Il faut une quatrième couleur : jaune
I : rouge

P et T de degré 2 :
P : première couleur possible : bleu
T : première couleur possible : vert

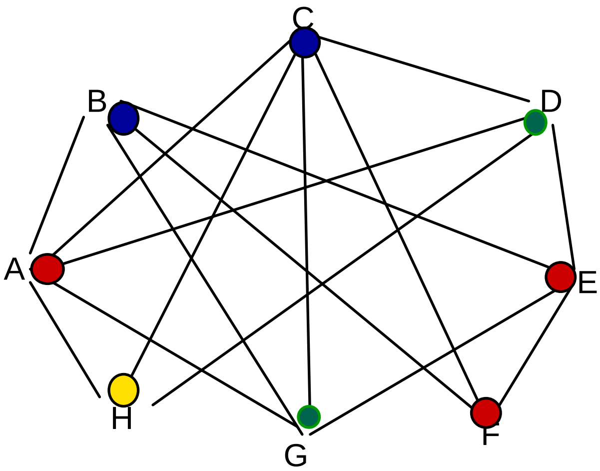
E de degré 1 : rouge



Extrait du site http://eduscol.education.fr/D0015/exercices.htm
On a une coloration avec 4 couleurs.
En fait, sur cette carte, on ne peut pas faire mieux : les 4 pays A, F, B et Lu étant 2 à 2 voisins.

V Des produits chimiques ....

On trace le graphe d'incompatibilité et on recherche une coloration des sommets avec un nombre minimum de couleurs. Les sommets de même couleur correspondent à des produits pouvant être dans le même container.



Ordre d'examen des sommets :
Degré 5 : A : rouge C : Bleu
Degré 4 : B : bleu D : vert E : rouge G : Vert
Degré 3 : F : rouge H : jaune

On a une coloration à 4 couleurs qui conduit à quatre containers
À, E et F, B et C , D et G , H
Si on considère les produits A C D H on constate qu'on ne peut faire mieux.
Sur cet exemple, comme sur le précédent, on constate, "à l'oeil", que l'heuristique fournit la solution optimale. Sur un problème de taille plus élevée ceci n'est pas possible.

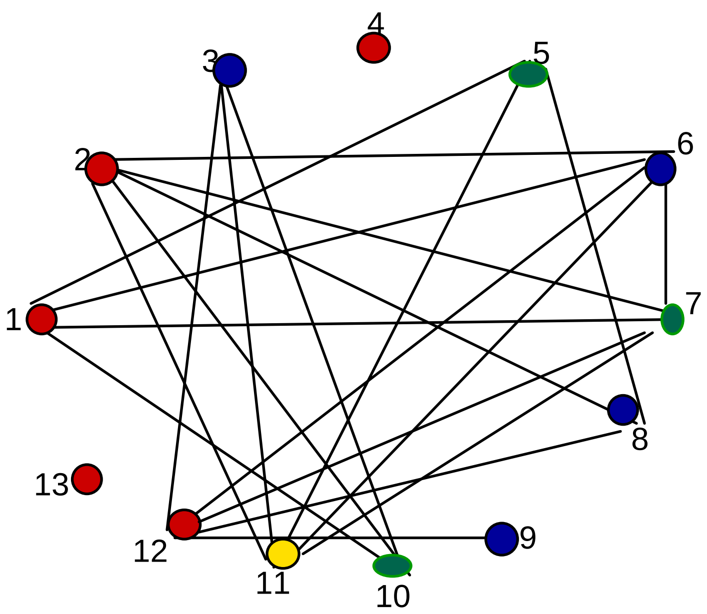
VI - L'intersection représentée sur la figure ci-dessous se trouve près d'une buvette (le "Bar à Jojo") aux environs de l'Université de Princeton, et est connue pour les nombreux embouteillages qu'elle provoque, plus

Les trajets possibles sont :
AB AC AD BA BD BC DA DB DC EA EB EC ED
Le tableau suivant donne les trajets incompatibles.

	2 AC	*3* AD	*4* BA	*5* BC	*6* BD	*7* DA	*8* DB	*9* DC	*10* EA	*11* EB	*12* EC	*13* ED
1 AB				*	*	*			*			
2 AC					*	*	*		*	*		
3 AD									*	*	*	
4 BA												
5 BC							*			*		
6 BD						*				*	*	
7 DA										*	*	
8 DB											*	
9 DC												
10 EA												
11 EB												
12 EC												

On construit alors le graphe d'incompatibilité et on procède à la coloration des sommets. Les sommets de même couleur correspondent à des trajets qui peuvent être autorisés simultanément, donc à une phase. Le nombre minimum de couleurs correspondra au minimum de phases et par suite au minimum de temps d'attente.

Graphe associé



Ce graphe donne la solution obtenue en prenant les sommets dans l'ordre de degré décroissant.
La coloration regroupe dans une même classe tous les trajets compatibles.
Le résultat précédent permet de proposer 4 phases :
Phase 1 : 1, 2 ,4 ,12 et 13 (rouge)
Phase 2 : 3, 6, 8, 9 (bleu)
Phase 3 : 5, 10 (vert)

Phase 4 : 11   (jaune)

La solution n'est pas unique et on peut trouver des solutions pour lesquelles le nombre de trajets simultanés est plus équilibré dans les différentes phases.