LA PROGRAMMATION LINEAIRE : UN OUTIL DE MODELISATION

Dans les leçons précédentes, nous avons modélisé des problèmes en utilisant des graphes.
Nous abordons dans cette leçon un autre type de modélisation. Un problème d'optimisation va être représenté par un problème de programmation mathématique : les variables de décision sont des variables numériques, la représentation des décisions possibles et du critère fait appel à des équations ou fonctions mathématiques. Plus précisément, nous introduisons ici le problème particulier de programmation linéaire.

I Exemples d'introduction

Exemple 1

Le problème

L'entreprise "Nacege", spécialisée dans la fabrication de matériels informatiques, propose à son catalogue d'ordinateurs des centaines de référence.
Pour simplifier, on ne s'intéresse ici qu'à deux types d'ordinateurs : le IM4 et le IM5.

Chacun d'eux comporte un processeur - le même - mais les deux modèles diffèrent en particulier par le nombre de barrettes mémoires.
Plus précisément, le IM4 comporte 2 barrettes alors que le IM5 en comporte 6.
Le marché pour ces composants est tel qu'on ne peut espérer acheter auprès des fournisseurs habituels plus de 10 000 processeurs pour le trimestre à venir et plus de 48 000 barrettes.

Une autre limitation risque d'intervenir sur la production. L'assemblage est caractérisé, en particulier, par une opération délicate, qui pour l'IM4 est de 3 minutes alors que pour l'IM5 elle n'est que d'une minute ; on ne dispose a priori pour l'assemblage de ces deux types de machines que de 24 000 minutes pour le trimestre à venir.

Enfin, compte tenu des conditions actuelles du marché, on peut espérer retirer un profit de 400 euros sur l'IM4 et de 800 euros sur l'IM5.

Le problème est de déterminer les quantités de chacun des deux types d'ordinateurs à fabriquer de manière à obtenir le plus grand profit possible.

Modélisation du problème

Nous examinons dans l'ordre la représentation des décisions, des décisions possibles et du critère.

Les décisions

Les décisions concernent les quantités à fabriquer, ce qui se représente naturellement par deux nombres positifs x_1 pour l'IM4 et x_2 pour l'IM5.

Les décisions possibles

Il s'agit de représenter les différentes contraintes limitant la production de ces deux types d'ordinateur.
La première porte sur la limitation du nombre de processeurs disponibles : chaque machine utilise un processeur et on peut en disposer de 10 000.
On doit donc imposer :
$x_1 + x_2 \leq 10\,000$

De même, le nombre de barrettes est limité. Compte tenu du nombre de barrettes dans chacun des 2 ordinateurs et du nombre de barrettes disponibles, cette contrainte se traduit par :
$2x_1 + 6x_2 \leq 48\,000$
Enfin, la contrainte portant sur le temps d'assemblage s'écrit :

$3x_1 + x_2 \leq 24000$
L'ensemble des décisions possibles est donc caractérisé par l'ensemble des valeurs de x1 et x2 vérifiant :

$$x_1 + x_2 \leq 10\ 000$$
$$2x_1 + 6x_2 \leq 48\ 000$$
$$3x_1 + x_2 \leq 24\ 000$$
$$x_1 \geq 0 \quad x_2 \geq 0$$

Le critère
On souhaite maximiser le profit qui est représenté par : $400x_1 + 800x_2$.

Le problème initial est donc modélisé par le problème de programmation mathématique suivant :

$$\left|\begin{array}{l} \text{Max } (400\,x1 + 800\,x2) \\ \text{sous les contraintes} \\ x_1 + x_2 \leq 10\ 000 \\ 2x_1 + 6x_2 \leq 48\ 000 \\ 3x_1 + x_2 \leq 24\ 000 \\ x_1 \geq 0 x_2 \geq 0 \end{array}\right.$$

Le modèle obtenu est un exemple de **problème de programmation linéaire.**

Exemple 2
Présentons d'abord le problème.
Une entreprise disposant de plusieurs lieux de production doit transporter ses produits finis vers des entrepôts régionaux pour répondre aux besoins locaux.
Pour simplifier l'exemple, on se contente de 2 usines avec 3 entrepôts.
On peut a priori faire transiter le produit de n'importe quelle unité de production vers n'importe quel entrepôt.
Chaque unité de production a une capacité limitée. Supposons, par exemple, que la capacité de production de l'usine 1 (notée U1) soit de 100 (en milliers de tonnes) et celle de l'usine U2 de 150.
Les entrepôts ont exprimé une demande qui doit être satisfaite : l'entrepôt 1, noté E1, a une demande de 50 (en milliers de tonnes), le deuxième 70 et le troisième 80.

Le coût de transport dépend bien sûr du trajet à effectuer et du mode de transport, donc de l'usine de départ et de l'entrepôt d'arrivée.
Le coût de transport par tonne de l'usine i (i = 1,2) vers l'entrepôt j (j = 1,2,3) est donné dans le tableau suivant.

	E1	E2	E3
U1	4	3	6
U2	3	5	3

Le problème est de déterminer les quantités à transporter de chaque usine vers chaque entrepôt, de manière à minimiser le coût total de transport tout en respectant les contraintes de capacité des usines et de demande des entrepôts.

Le modèle

Les décisions
Elles portent sur les quantités à transporter.
La quantité transportée (en milliers de tonnes) de l'usine i vers le dépôt j est représentée par la variable positive x_{ij} (i = 1,2 et j = 1,2,3).

Les décisions possibles
Il s'agit de traduire les contraintes limitant les décisions. Il y a deux types de contraintes, celle portant sur la capacité des usines et celle portant sur la demande des magasins.

- Limitation sur la capacité de production des usines
Il faut exprimer que, de chaque usine, ne peut partir une quantité supérieure à ce qu'elle est capable de produire.
Pour l'usine U1, $x_{11} + x_{12} + x_{13}$ représente, en milliers de tonnes, ce qui part vers les entrepôts. La contrainte sur la capacité de l'usine U1 est traduite par :
$x_{11} + x_{12} + x_{13} \leq 100$
Pour l'usine 2, on a de même :
$x_{21} + x_{22} + x_{23} \leq 150$

- Limitation sur la demande des entrepôts
Ce qui arrive à chaque entrepôt doit être égal à ce qu'il a demandé. Pour l'entrepôt E1, $x_{11} + x_{21}$ représente la quantité qui lui est livrée.
Sa demande étant de 50, on doit donc imposer :
$x_{11} + x_{21} = 50$
On a de même pour les 2 autres entrepôts :
$x_{12} + x_{22} = 70$
$x_{13} + x_{23} = 80$

L'ensemble des décisions possibles est donc caractérisé par l'ensemble des valeurs des x_{ij} vérifiant :
$x_{11} + x_{12} + x_{13} \leq 100$
$x_{21} + x_{22} + x_{23} \leq 150$
$x_{11} + x_{21} = 50$
$x_{12} + x_{22} = 70$
$x_{13} + x_{23} = 80$
$x_{ij} \geq 0 \quad i = 1,2 \quad j = 1,2,3$

Le critère
On souhaite minimiser le coût total de transport.
Si on fait l'hypothèse que sur chaque trajet le coût est proportionnel aux quantités transportées, le coût total s'écrit :
$4\,x_{11} + 3\,x_{12} + 6\,x_{13} + 3\,x_{21} + 5\,x_{22} + 3\,x_{23}$
que l'on souhaite minimiser.

Le problème initial est donc modélisé par le problème de programmation mathématique.

$$\left|\begin{array}{l}
\text{Min } 4\,x_{11} + 3\,x_{12} + 6\,x_{13} + 3\,x_{21} + 5\,x_{22} + 3\,x_{23} \\
\text{sous les contraintes} \\
x_{11} + x_{12} + x_{13} \leq 100 \\
x_{21} + x_{22} + x_{23} \leq 150 \\
x_{11} + x_{21} = 50 \\
x_{12} + x_{22} = 70 \\
x_{13} + x_{23} = 80 \\
x_{ij} \geq 0 \quad i = 1,2 \quad j = 1,2,3
\end{array}\right.$$

Ce problème, appelé "**problème de transport classique**", est, comme dans le premier exemple, modélisé par un problème de programmation linéaire.

II Définition d'un problème de programmation linéaire

Le modèle type de programmation linéaire peut être retenu pour représenter de nombreux problèmes. Un problème sera modélisé par un problème de programmation linéaire si :
- les décisions peuvent être représentées par des nombres réels (généralement positifs),
- les contraintes portant sur ces variables peuvent être représentées par des équations ou des inéquations linéaires c'est-à-dire que les variables n'interviennent qu'au premier degré (pas de carrés, pas de produit de variables),
- le critère de choix peut être représenté par une fonction linéaire des variables que l'on souhaitera minimiser ou maximiser.

La forme générale d'un problème de programmation linéaire de n variables et p contraintes est :

$$\left|\begin{array}{l} \text{min ou max } c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_j\, x_j + \ldots + c_nx_n \\ \text{sous les contraintes} \\ a_{i1}\, x_1 + a_{i2}\, x_2 + \ldots + a_{in}\, x_n \leq \text{ , } \geq \text{ ou } = d_i \quad \text{pour } i = 1, ..p \\ x_j \geq 0 \;\; j = 1, \ldots, n \end{array}\right.$$

Les coefficients c_j de la fonction objectif, les coefficients a_{ij} du premier membre des contraintes et les seconds membres d_i des contraintes sont des données du problème.

Définitions
Une **solution réalisable** est un n-uplet $(x_1,\ldots,x_n)$ vérifiant toutes les contraintes.
Une **solution optimale** est une solution réalisable qui donne à la fonction objectif la plus grande (problème de maximisation) ou la plus petite valeur possible (problème de minimisation) sur l'ensemble des solutions réalisables.

La **valeur maximale** (resp : minimale) de la fonction objectif (à ne pas confondre avec la solution optimale) est la plus grande valeur (resp : la plus petite) que peut prendre la fonction objectif sur l'ensemble des solutions réalisables.

Les exemples de problème qui relèvent de la programmation linéaire sont fort nombreux. On peut citer :
- les problèmes de mélange : quelle est la composition optimale d'un produit ?
- les problèmes de planification de production : quand et à quel moment doit-on planifier la production d'un bien,
- les problèmes de transport, généralisation du problème de transport classique,
- les problèmes de planification d'horaires,
- les problèmes de découpe industrielle

.....

III Résolution graphique d'un problème de programmation linéaire

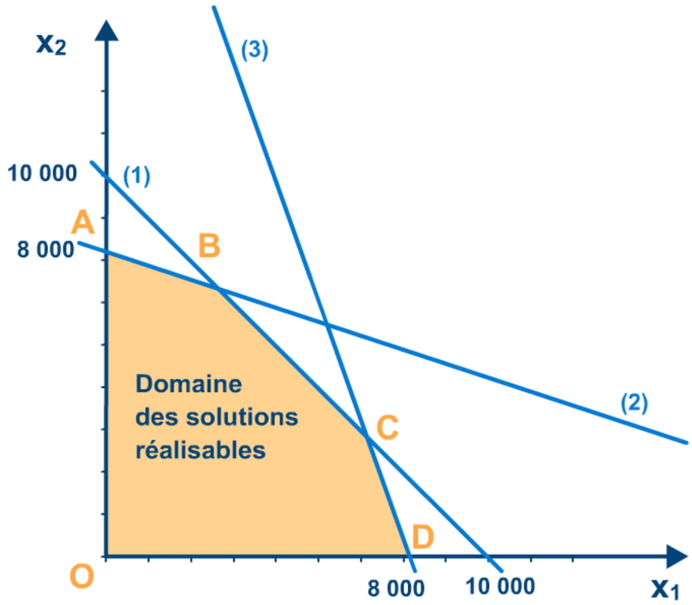
De manière très générale, la résolution d'un problème de programmation linéaire nécessite la mise en oeuvre d'un algorithme. Nous en verrons le principe dans la leçon suivante.

Dans le cas où le problème ne comporterait que deux variables, on peut le résoudre graphiquement. Cette résolution graphique permet de mettre en évidence certaines propriétés que possède n'importe quel problème de programmation linéaire.
Considérons le problème de l'exemple 1 :

$$\left|\begin{array}{ll} \text{Max } (400\,x_1 + 800\,x_2) & \\ x_1 + x_2 \leq 10\,000 & (1) \\ 2x_1 + 6x_2 \leq 48\,000 & (2) \\ 3x_1 + x_2 \leq 24\,000 & (3) \\ x_1 \geq 0 \quad x_2 \geq 0 & \end{array}\right.$$

A chaque couple de variables x_1 et x_2, on associe un point du plan dont les coordonnées correspondent aux valeurs des variables.

Les variables étant positives, ces points sont situés dans l'orthant positif (le quart Nord-Est du plan).
Chaque contrainte permet de délimiter une partie du plan.
Par exemple, la droite d'équation $x_1 + x_2 = 10\,000$ définit 2 demi-plans.
Au-dessus de cette droite, les coordonnées des points du plan vérifient $x_1 + x_2 > 10\,000$.
On est donc conduit à exclure ces points.



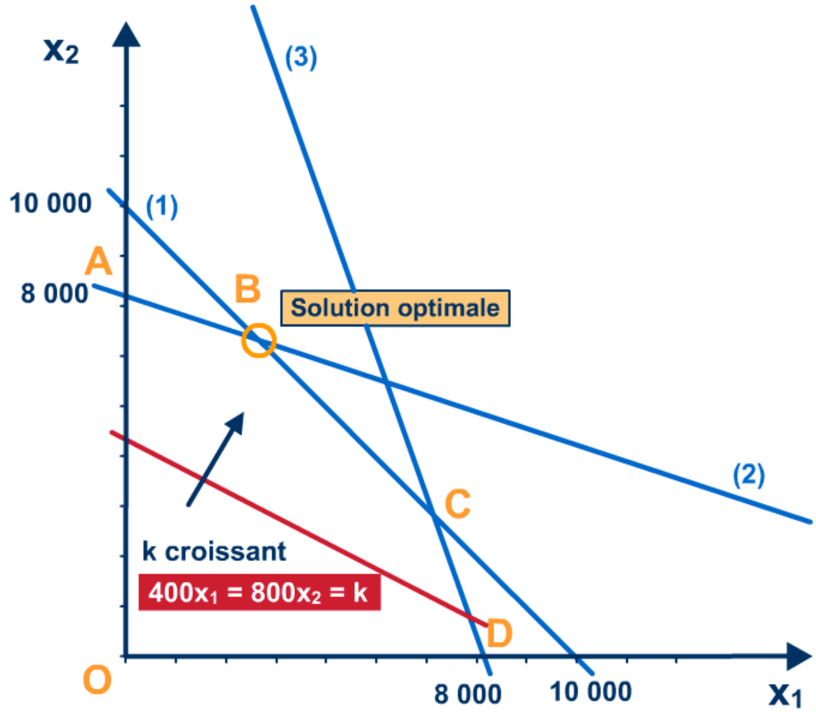
On fait de même pour les 2 autres contraintes.

On trace les droites d'équation
$x_1 + 2x_2 = 48\,000$ et
$3x_1 + x_2 = 24\,000$
et on élimine les points situés au-dessus de ces droites.

Les solutions réalisables du problème correspondent aux points du plan situés à l'intérieur du polyédre O A B C D et sur ses bords.

Il s'agit maintenant de déterminer parmi tous ces points celui ou ceux qui correspondent à la plus grande valeur possible pour la fonction objectif $400\,x_1 + 800\,x_2$

Considérons la droite d'équation $400\,x_1 + 800\,x_2 = k$ où k est une constante.
Tous les points situés sur cette droite donnent à l'expression $400\,x_1 + 800\,x_2$ la même valeur k.
Ils sont équivalents du point de vue du profit.
Si on déplace cette droite vers la droite, la valeur de k augmente.
La valeur limite pour k est obtenue pour la droite passant par le point B.



On peut conclure que sur l'ensemble du domaine des solutions réalisables, celle qui donne la plus grande valeur à la fonction objectif correspond au point B dont les coordonnées peuvent être calculés comme point d'intersection des contraintes (1) et (2).

La solution optimale du problème est $x_1 = 3\ 000 \quad x_2 = 7\ 000$
La valeur maximale de la fonction objectif est : 6 800 000.

Pour l'entreprise, ceci signifie que la répartition optimale entre les deux types d'ordinateurs est de 3000 ordinateurs de type IM4 et 7000 ordinateurs de type IM5 avec un profit maximal de 6 800 000 €.

L'analyse de cette solution montre que tous les processeurs et toutes les barrettes sont utilisés, mais qu'il reste du temps d'assemblage disponible.
On dit que les contraintes (1) et (2) sont **saturées** ou **liées** : elles sont vérifiées avec égalité à l'optimum alors que la contrainte (3) est non saturée ou non liée : il y a une marge entre la valeur de son premier et celle de son second membre à l'optimum.

IV Etude graphique de l'analyse de sensibilité

Problème 1
La modélisation et la résolution du modèle a été faite en supposant que le profit sur le IM4 était de 400 €. En fait, cette machine est très bien accueillie sur le marché et les coûts de fabrication sont moins élevés que prévus. On peut donc espérer un profit plus important sur ce type de machine. Faut-il en produire davantage quitte à diminuer la production de l'IM5 ?

Le profit p_1 sur l'IM4 devient un paramètre du problème qui s'écrit maintenant :

$$\left|\begin{array}{ll} \text{Max } (p_1 x_1 + 800 x_2) & \\ x_1 + x_2 \leq 10\,000 & (1) \\ 2x_1 + 6x_2 \leq 48\,000 & (2) \\ 3x_1 + x_2 \leq 24\,000 & (3) \\ x_1 \geq 0 \quad x_2 \geq 0 & \end{array}\right.$$

Analysons graphiquement les conséquences de la variation du profit sur l'IM4.
La droite représentative du profit avait pour équation $400\ x_1 + 800\ x_2$ = constante.
La variation du profit sur l'IM4 implique que le coefficient de x_1 dans cette équation varie et donc que la pente de la droite représentative du profit varie.
Tant que la pente de cette droite reste comprise entre celle des droites (1) et (2), le raisonnement fait lors de la résolution graphique conduit à la conclusion que la solution associée au point B est toujours optimale.
L'intervalle de variation de p_1 est donné par :
$1/3 \leq p_1/800 \leq 1$ soit $800/3 \leq p_1 \leq 800$

On a donc mis en évidence un intervalle de variation du coefficient de x_1 dans la fonction objectif sur lequel la solution optimale n'est pas changée.
Dans cet exemple, ceci nous conduit à la conclusion que tant que le profit sur l'IM4 reste entre 800/3 et 800, il faut continuer à produire 3000 unités de l'IM4 et 7000 pour l'IM5.

Pour ces mêmes valeurs de p_1, la valeur maximale du profit total sera égale à :
$3\,000\ p_1 + 800 * 7000 = 3\,000\ p_1 + 5\,600\,000$

Problème 2
Un deuxième problème se pose : actuellement, le nombre de processeurs que l'on pourrait acquérir est estimé à 10 000. Mais l'incertitude sur les quantités susceptibles d'être livrées est grande.
On voudrait savoir quel serait l'impact sur la production d'une modification de cette quantité.

L'analyse graphique va nous apporter une réponse.
La contrainte portant sur le nombre de processeurs est représentée par la droite (1) dont l'équation $x_1 + x_2 = 10\,000$ passe à $x_1 + x_2 = 10\,000 + \delta$
Graphiquement cela signifie que la contrainte (1) se déplace parallèlement à elle-même, vers le haut si δ est positif, vers le bas si δ est négatif.
On constate alors que le point B intersection des droites (1) et (2) en lequel se trouve actuellement la solution optimale se déplace sur la droite (2).
Comme les pentes des droites (1) et (2) ne sont pas changées, la solution optimale reste à l'intersection des contraintes (1) et (2), à condition cependant que ce point reste dans le domaine des solutions réalisables.

Dans ces conditions, pour avoir la solution optimale, il suffit de déterminer les coordonnées du point d'intersection des droites (1) et (2).
$x_1 + x_2 = 10000 + \delta$ et $2x_1 + 6x_2 = 48\,000$
soit $x_1 = 3\,000 + 3\delta/2$ et $x_2 = 7\,000 - \delta/2$

Ces valeurs correspondent à la solution optimale, à condition que cette solution soit réalisable.
$x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$ et la contrainte (3) doit rester satisfaite :
$x_1 \geq 0 \Leftrightarrow 3\,000 + 3\delta/2 \geq 0\ \delta \Leftrightarrow \delta \geq -2\,000$
$x_2 \geq 0 \Leftrightarrow 7\,000 - \delta/2 \geq 0 \Leftrightarrow \delta \leq 14\,000$
Contrainte (3) satisfaite $\Leftrightarrow 3\,(3\,000 + 3\delta/2) + 7\,000 - \delta/2 \leq 24\,000 \Leftrightarrow \delta \leq 2\,000$

soit $-2\,000 \leq \delta \leq 2\,000$

Tant que δ reste compris entre -2000 et 2000, la solution optimale reste à l'intersection des contraintes (1) et (2) : c'est à dire que les processeurs et les barrettes continuent d'être utilisés entièrement alors qu'il reste toujours du temps d'assemblage disponible. Les quantités à fabriquer dépendent cependant de δ, c'est à dire du nombre de processeurs disponibles.
Pour δ processeurs supplémentaires, la production de l'IM4 augmente de $3\delta/2$ alors que celle de l'IM5 diminue de $\delta/2$.
La variation du profit sera alors égale à $400 * 3\delta/2 - 800 * \delta/2 = 200\delta$.
Chaque processeur supplémentaire pourrait faire augmenter le profit de 200, ou au contraire, toute diminution de ce nombre de processeurs le fera diminuer de 200 par processeur en moins, et ceci sur un intervalle allant de - 2000 processeurs à + 2000 processeurs.
De cette information on doit pouvoir tirer les conséquences sur l'intérêt que l'on pourrait avoir à trouver un autre fournisseur susceptible de fournir lui-aussi ce matériel à un prix qui, le cas échéant, pourrait être supérieur au prix actuel, compte-tenu de ce que cela peut rapporter.

Nous venons de voir graphiquement quelles pouvaient être les conséquences d'une variation d'un coefficient de la fonction objectif ou du second membre d'une contrainte. Tout problème de programmation linéaire donne lieu à ce type d'analyse et les résultats obtenus ici sont généraux.