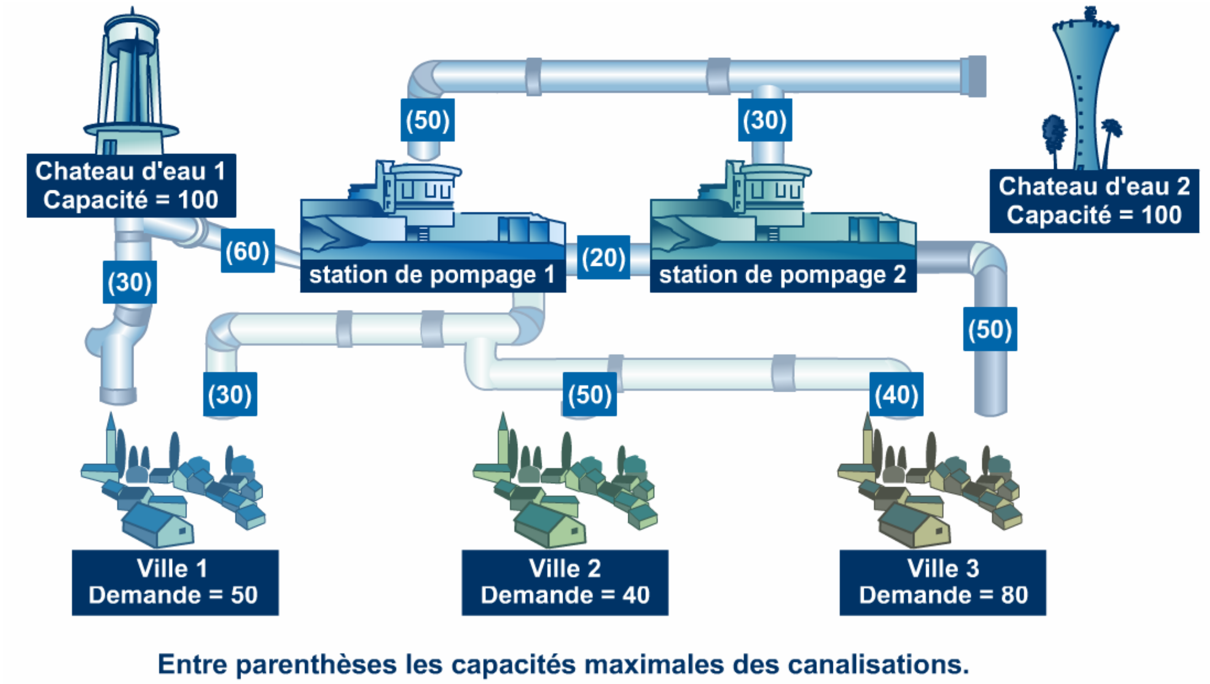
LE PROBLEME DU FLOT MAXIMAL

I Exemple d’introduction

Deux châteaux d'eau alimentent 3 villes à travers un réseau de canalisations au sein duquel se trouvent également des stations de pompage.
Les châteaux d'eau ont une capacité limitée qui s'élève pour chacun d'eux à 100 000 m^3.
Les villes ont exprimé une demande qui est au minimum de 50 000 pour la ville 1, 40 000 pour la 2 et 80 000 pour la ville 3 en m^3.
Les canalisations entre les châteaux d’eau et les villes ont des débits limités. Par exemple, pour la canalisation reliant le château 1 à la ville 1, le débit maximum est de 30 alors que celui de la canalisation reliant la station de pompage 1 à la ville 2 est de 50 en milliers de m^3. Ces valeurs figurent sur le graphique entre parenthèses le long des canalisations.



Un premier problème est de déterminer s'il est possible de satisfaire à travers ce réseau la demande des 3 villes et comment ?
Pour résoudre ce problème il faut dans un premier temps le modéliser.
Pour cela, nous introduisons un nouveau problème standard qui est celui du flot maximal sur un réseau.

II Définition d’un flot sur un graphe

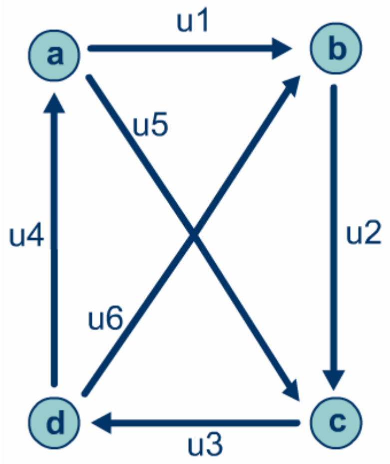
Soit G = (X,U) un graphe.

A chaque sommet x, on associe deux ensembles d'arcs :

$\omega^+(x)$ = ensemble des arcs d'origine x et d'extrémité différente de x

$\omega^-(x)$ = ensemble des arcs d'extrémité x et d'origine différente de x

Les arcs de $\omega^+(x)$ sont les arcs "sortant de x" et ceux de $\omega^-(x)$ les arcs "entrant en x".



$\omega^+(a) = \{u1 , u5\}$ $\omega^-(a) = \{u4\}$ $\omega^+(b) = \{u2\}$ $\omega^-(b) = \{u1, u6\}$

Définition d'un flot sur un graphe

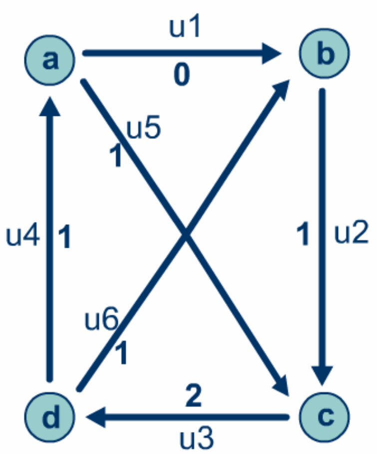
Soit G = (X, U) un graphe.

A chaque arc u $\in$ U, on associe un nombre réel, noté φ_u, appelé **flux** sur l'arc u.

$\varphi = \{ \varphi_u / u \in U \}$ est un **flot** si et seulement si en chaque sommet x $\in$ X, la somme des flux sur les arcs entrant est égal à la somme des flux sur les arcs sortant.

$$\varphi = (\varphi_u) \text{ est un flot} \qquad \forall x \in X \qquad \sum_{u \in \omega+(x)} \varphi_u = \sum_{u \in \omega-(x)} \varphi_u$$

C'est ce qu'on appelle la loi des nœuds qui exprime la conservation des flux en chaque sommet.



Sur le graphe ci-dessus, les valeurs suivantes : 0 pour l'arc u1, 1 pour l'arc u2 etc. constituent un flot. On peut vérifier qu'en chaque sommet, la somme des flux entrants est égale à la somme des flux sortants, il y a bien conservation des flux.

Par exemple au sommet "a" :

$\sum_{u \in \omega+(a)} \varphi_u = \varphi_{u1} + \varphi_{u5} = 0 + 1$ $\sum_{u \in \omega-(a)} \varphi_u = \varphi_{u4} = 1$

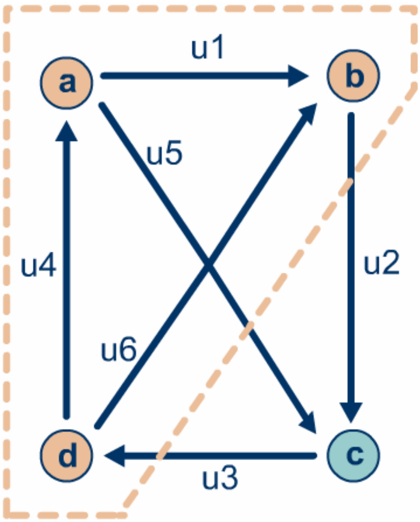
Un flot peut être interprété comme représentant des produits circulant sur les arcs, que ce soit de la matière, des fluides, de l'information ou quoique ce soit du moment qu'il n'y a pas de stock aux sommets : tout ce qui arrive est égal à ce qui part.

On introduit ici une propriété des flots qui généralise la conservation des flux en un sommet.
Soit S un sous-ensemble de sommets.

On note $\omega^+(S)$ l'ensemble des arcs dont l'origine est dans S et l'extrémité hors de S, et $\omega^-(S)$ l'ensemble des arcs dont l'extrémité est dans S et l'origine hors de S.

$\omega^+(S) = \{ u \in U$ / origine de u dans S et extrémité de u hors de S$\}$

$\omega^-(S) = \{ u \in U$ / extrémité de u dans S et origine de u hors de S$\}$



Si S = {a, b, d} $\omega^+(S) = \{u_2, u_5\}$ $\omega^-(S) = \{u_3\}$

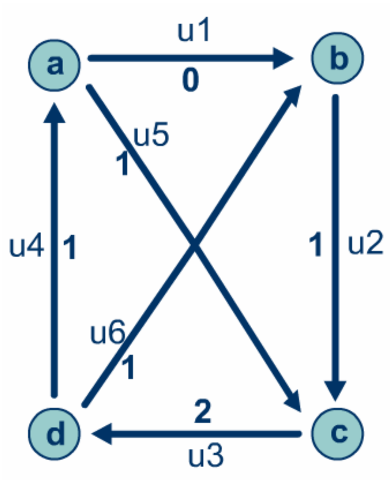
Proposition

Soient φ un flot sur un graphe et S un sous-ensemble quelconque de sommets.
La somme des flux sur les arcs entrants dans ce sous-ensemble de sommets est égale à la somme des flux qui en sortent.

$$\forall S \subset X \quad \sum_{u \in \omega+(S)} \varphi_u = \sum_{u \in \omega-(S)} \varphi_u$$

Ce résultat généralise la définition d'un flot.

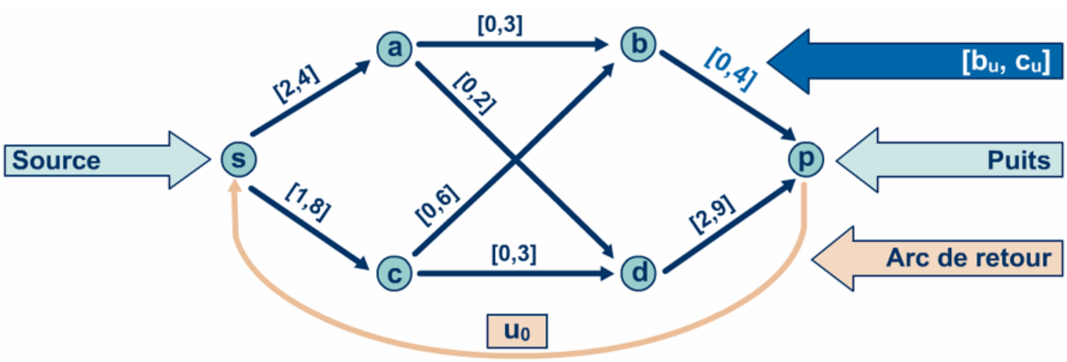
On vérifie cette propriété sur l'exemple à partir du flot indiqué.



Pour S = {a, b, d} :
somme des flux entrants = $\varphi_{u4} + \varphi_{u5} = 1 + 1 = 2$, somme des flux sortants : $\varphi_{u3} = 2$

III Définition du problème de flot maximal sur un réseau

Définition d'un réseau
Un graphe G = (X,U) est un **réseau** si :
- il est connexe,
- il possède deux sommets particuliers s et p appelés **source** et **puits**
- les arcs sont munis de capacités inférieures b_u et supérieures c_u avec $b_u \leq c_u$
- l'arc (p, s) existe. Il est appelé **arc de retour** et noté u_0.



A la place de source et puits, on dit aussi **entrée** et **sortie** du réseau.

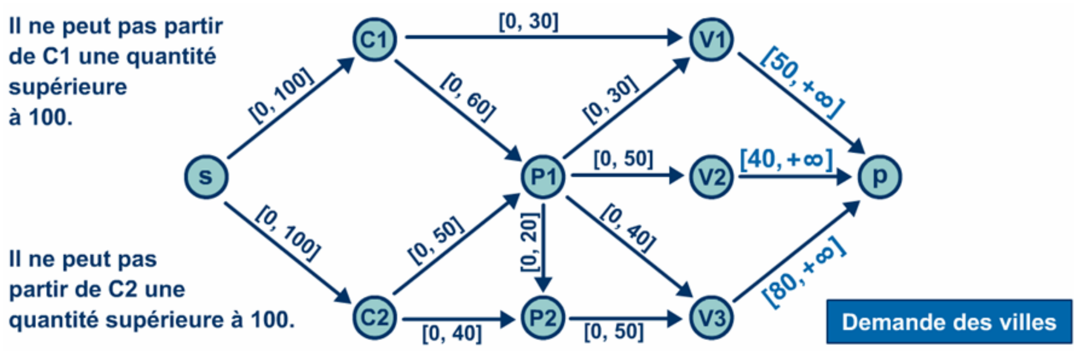
On dit qu'un flot φ sur G est **compatible avec les capacités** si :

$$\forall u \in U \quad b_u \leq \varphi_u \leq c_u$$

Sur chaque arc, le **flux** est compris entre la capacité inférieure et supérieure.
La **valeur** du flot sur un réseau est égale à la valeur du flux φ_0 sur l'arc de retour u_0.
La valeur du flot est égale à ce qui "part" de la source et à ce qui "arrive" au puits.
L'arc de retour sert de compteur, il permet de mesurer ce qui circule sur le réseau.

Définition du problème du flot maximal
Le **problème du flot maximal** est celui de la détermination d'un flot sur G, compatible avec les capacités, et dont le flux φ_0 sur l'arc de retour u_0 est le plus grand possible.

Modélisation du problème de distribution d'eau par un problème de flot maximal
Aux châteaux d'eau, aux stations de pompage et aux villes on associe des sommets et aux canalisations des arcs.
Les valeurs numériques le long des arcs traduisent une capacité inférieure nulle et une capacité supérieure égale au débit maximum.



Pour modéliser les capacités des châteaux d'eau, on introduit un sommet supplémentaire s, qui sera la source du réseau, et deux arcs (s, C1) et (s, C2) avec une capacité supérieure égale à 100.
La conservation des flux au sommet C1 permet de traduire qu'il ne peut pas partir de C1 une quantité supérieure à 100. Il en est de même pour C2.
Si on veut mesurer ce qui arrive en chaque ville, on introduit un sommet supplémentaire p, qui sera le puits, et des arcs de chacune des villes vers p.
Pour imposer que les demandes des villes soient satisfaites, on munit ces arcs d'une capacité inférieure égale à la demande. Ce qui part de chaque ville sera au moins égal à la demande et, d'après la loi de conservation des flux, ce qui arrive en chaque ville sera aussi au moins égal à la demande.
A l'arc de retour près, on a construit un réseau sur lequel il s'agit de déterminer un flot compatible avec les capacités et de valeur maximale.

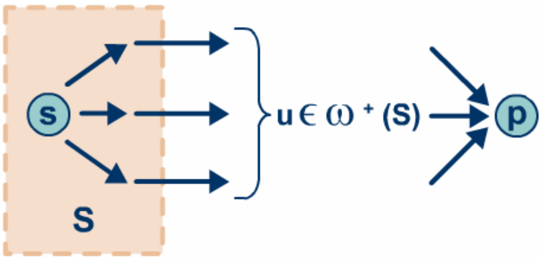
IV Résolution du problème de flot maximal : algorithme de Ford-Fulkerson

On se place dans le cas où les capacités inférieures sont nulles.

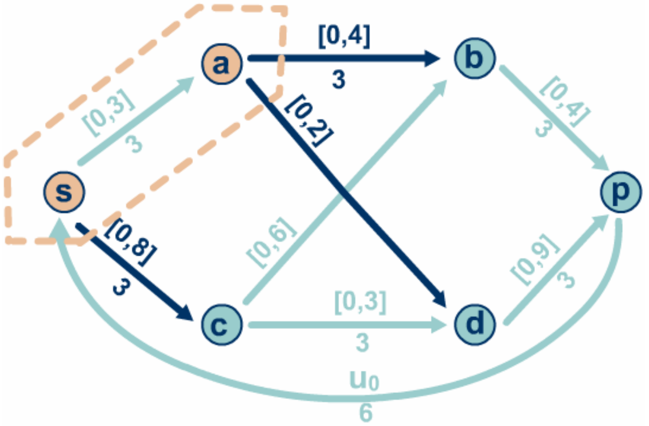
Définition des coupes
Soit S, un sous-ensemble de sommets, tel que $s \in S$ et $p \notin S$
On dit que l'ensemble des arcs $\omega^+(S) = \{u \in U$/origine de u dans S et extrémité hors de S$\}$ est une **coupe séparant s et p.**

$C(S) = \sum_{u \in \omega+(S)} c_u$ est la **capacité de la coupe** $\omega^+(S)$

Si $\omega^+(S) = \emptyset$ alors $C(S) = 0$



Exemple



S = {s, a}

ω^+(S)= {(a, b), (a, d), (s, c)} est une coupe qui sépare s et p de capacité C(S) = 4 + 2 + 8 = 14

Proposition

Quel que soit le flot compatible avec les capacités sur G et quelle que soit la coupe séparant s et p, la valeur du flot est inférieure ou égale à la capacité de la coupe.

Démonstration

Soit S un sous-ensemble de sommets avec $s \in S$ et $p \notin S$.

D'après la loi de conservation des flux, on a :

$$\sum_{u \in \omega+(S)} \varphi_u = \sum_{u \in \omega-(S)} \varphi_u$$

Or l'arc u_0 est un arc de ω^-(S).

On peut donc écrire :

$$\sum_{u \in \omega-(S)\, u \neq u0} \varphi_u + \varphi_{u0} = \quad \text{soit} \quad \varphi_{u0} = \sum_{u \in \omega+(S)} \varphi_u - \sum_{u \in \omega-(S)\, u \neq u0} \varphi_u$$

Comme de plus $\forall\, u \in U \quad 0 \leq \varphi_u \leq c_u$, on a :

$$\sum_{u \in \omega+(S)} \varphi_u \leq c_u \quad \text{et} \quad \sum_{u \in \omega-(S)\, u \neq u0} \varphi_u \geq 0$$

donc : $\varphi_{u0} \leq \sum_{u \in \omega+(S)} c_u = C(S)$

Exemple

Si on prend la coupe ω^+(S)= {(a, b), (a, d), (s, c)} dont la capacité est 14, on peut affirmer que la valeur d'un flot quelconque sera inférieure ou égale à 14, ce qui est le cas du flot de valeur 6 sur le graphe ci-dessus.

Et ceci est vrai pour n'importe quel flot et n'importe quelle coupe.
On peut alors déduire le résultat très important suivant :

Proposition

Soient φ^* un flot compatible avec les capacités et $S^* \subset X$ avec $s \in S^*$ et $p \notin S^*$ tels que la valeur du flot soit égale à la capacité de la coupe :

$$\varphi\ u0 = \sum_{u \in \omega+(S^*)} c_u$$

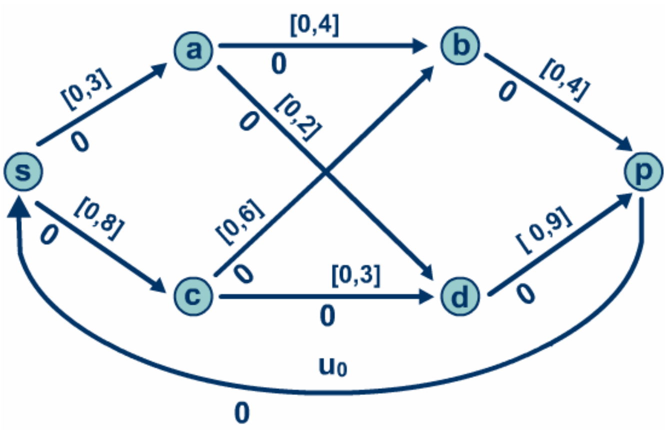
le flot φ^* est maximal et la capacité de la coupe $\omega^+(S^*)$ est minimale.

Notons qu'on introduit apparemment un deuxième problème d'optimisation, celui de la coupe de capacité minimale.

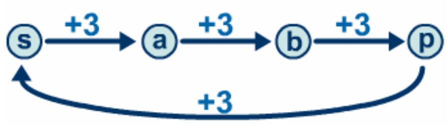
Principe de l'algorithme de Ford Fulkerson : exemple

On va construire progressivement un flot vérifiant les conditions de la proposition précédente.

Comme nous nous sommes placés dans le cas où les capacités inférieures sur chaque arc étaient toutes nulles, le flot identiquement nul est compatible avec les capacités.

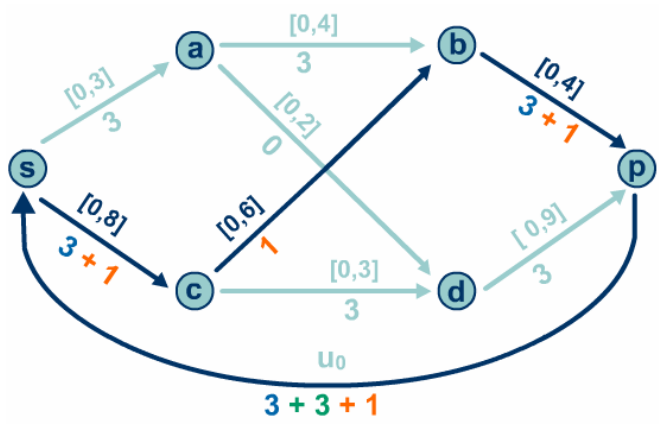


Considérons le **chemin** s a b p. On peut envoyer le long des arcs de ce chemin une quantité maximale de 3, compte tenu de la capacité supérieure de l'arc (s,a).



On obtient ainsi un flot de valeur 3.

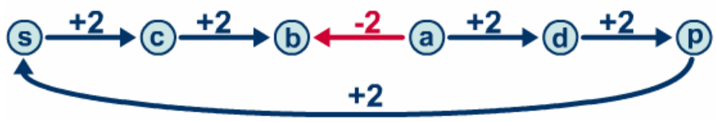
Mais on peut faire lde même avec le chemin s, c, d, p en envoyant une quantité de 3, ce qui conduit à un flot de valeur 6.
On peut encore recommencer avec le chemin s c b p et une quantité égale à 1. Le flot a maintenant pour valeur 7.



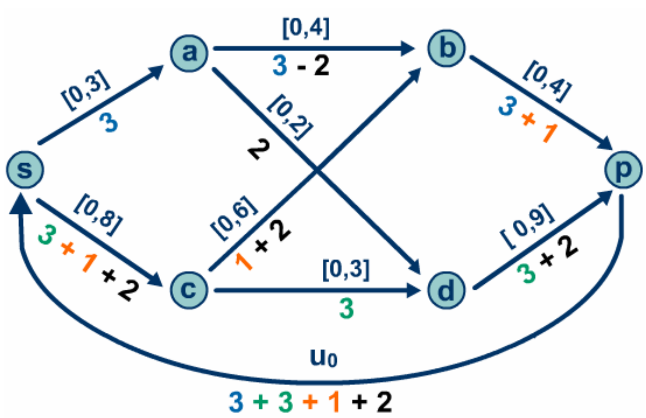
Sur chaque **chemin** de s à p, il existe un arc dont la capacité supérieure est saturée. On dit que le flot est **complet**.

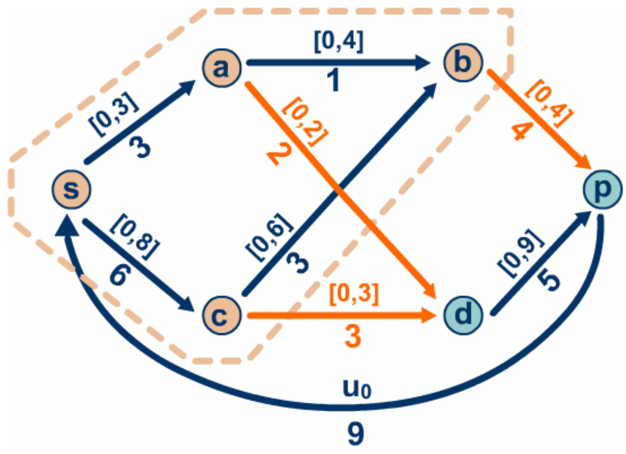
Considérons maintenant la **chaîne** s c b a d p.
Sur les arcs (s, c) (c, b) (a, d) et (d, p) le flux peut augmenter, alors que sur l'arc (a, b) il peut diminuer puisqu'il est strictement positif.
Par exemple, si on envoie une unité de s vers c puis de c vers b, il faudra, pour que la conservation des flux reste vérifiée en b, diminuer le flux sur l'arc (a, b) d'une unité.
On continuera en augmentant de 1 sur l'arc (a, d), ce qui assure la conservation des flux au sommet a. On termine en augmentant de 1 le flux sur l'arc (d, p).

On peut en fait augmenter et diminuer les flux d'une quantité égale à 2 : l'augmentation est limitée par l'arc (a, d) et la diminution par l'arc (a, b).



On procède donc à la modification suivante du flot pour obtenir un flot de valeur 9.





Soit S = {s, a, b, c}.
Les arcs de la coupe associée sont (b, p), (a, d) et (c, d). La capacité de cette coupe est égale à :
C(S) = 4 + 2 + 3 = 9

La capacité de la coupe est égale à la valeur du flot. D'après la proposition précédente, le flot est maximal et la coupe a une capacité minimale - c'est à dire que toute autre coupe aura sa capacité au moins égale à 9.

La connaissance de chaînes de s à p, comme celles qui nous ont permis de trouver ce flot maximal (3 chemins et une chaîne), va permettre de construire des flots successifs de valeur croissante.

Définition d'une chaîne améliorante (ou augmentante) relativement à un flot
Rappelons qu'une chaîne μ est une suite d'arcs qui ne sont pas nécessairement dans le même sens.
On distingue les arcs dans le sens direct $u \in \mu^+$ (arc avant) et ceux de sens inverse ou rétrograde (arc arrière) $u \in \mu^-$.
Soient un flot sur le réseau et μ une chaîne de la source s au puits p.
La chaîne est **améliorante** si pour les arcs de sens direct le flux est inférieur strictement à la capacité supérieure et si pour les arcs de sens inverse le flux est strictement positif.
La chaîne μ est améliorante si :

$$\forall\ u \in \mu^+ \quad \varphi_u < c_u \text{ et } \forall\ u \in \mu^- \quad \varphi_u > 0$$

Dans le premier cas, le flux peut augmenter alors que dans le deuxième cas il peut diminuer.

Augmentation de la valeur d'un flot à partir d'une chaîne améliorante
Soit μ une chaîne améliorante de s à p.
Si on augmente le flux de 1 sur les arcs dans le sens direct et qu'on le diminue de -1 pour les arcs dans le sens rétrograde, on conserve un flot.
Il y a toujours égalité en chaque sommet sur ce qui entre et ce qui sort, et le flux augmente aussi de 1 sur l'arc de retour.

Sur les arcs de sens direct on peut augmenter au maximum de la plus petite capacité résiduelle :
$\varepsilon^+ = \min (c_u - \varphi_u)$ pour $u \in \mu^+$
Sur les arcs rétrogrades on peut diminuer au maximum de la valeur du plus petit flux :
$\varepsilon^- = \min (\varphi_u)$ pour $u \in \mu^-$
Sur l'ensemble des arcs de la chaîne, on est limité par la plus petite de ces quantités :
$\varepsilon = \min (\varepsilon^+, \varepsilon^-)$

On construit ainsi un nouveau flot compatible avec les capacités dont la valeur sur l'arc de retour a augmenté de ε.

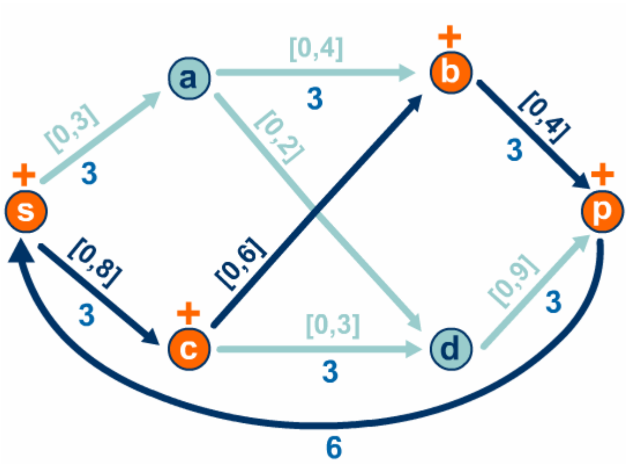
Mise en évidence d'une chaîne augmentante par une procédure de marquage
La recherche d'une chaîne améliorante - s'il en existe une - se fait par une procédure de marquage des sommets. Les sommets seront marqués par le signe + ou le signe -.

Principe de la procédure de marquage
Au départ on connaît un flot φ sur le graphe, compatible avec les capacités.
- Marquer s
- Marquer "+" un sommet extrémité d'un arc dont l'origine est marquée et sur lequel le flux peut augmenter ($\varphi_u < c_u$)
- Marquer "–" un sommet origine d'un arc dont l'extrémité est marquée et sur lequel le flux peut diminuer ($\varphi_u > 0$)

Procédure de marquage
Marquer s de "+"
TANT QUE "il existe des sommets qui peuvent être marqués" ET que p est non marqué
    Sélectionner un sommet "marquable" et le marquer
FINTANTQUE

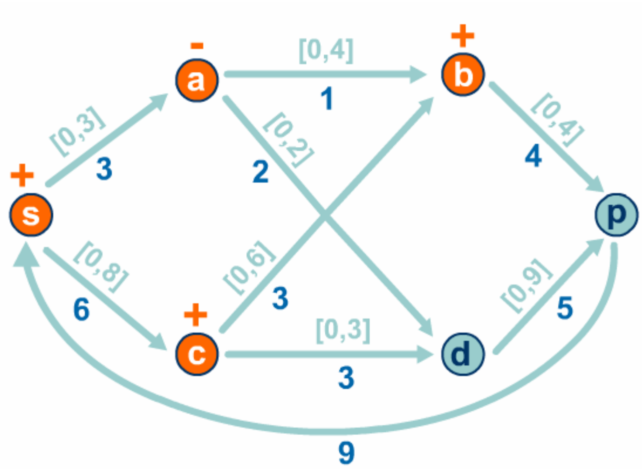
La condition TANT QUE exprime que l'on s'arrête dès que p est marqué ou lorsqu'on ne peut plus marquer de sommets.

Exemple 1



On commence par marquer s de "+" puis c, puis b, puis p.

Exemple 2

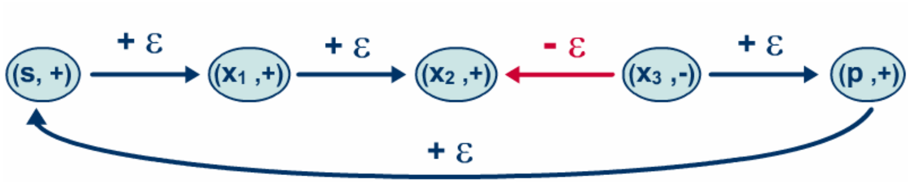


On peut marquer s puis c puis b de "+" ; on peut alors marquer a de "-" à partir de b, mais on ne peut marquer ni d ni p, les arcs (b, p), (a, d) et (c, d) ayant leur capacité supérieure saturée.

Examinons maintenant les conséquences des 2 cas de figure, p marqué ou p non marqué.

Cas 1 : on peut marquer le puits p
Si on peut marquer le puits p, c'est qu'il existe une chaîne améliorante que l'on peut reconstituer en remontant la suite des marquages qui ont permis d'arriver en p.
En pratique, on enregistre pour chaque sommet le sommet à partir duquel il a été marqué.

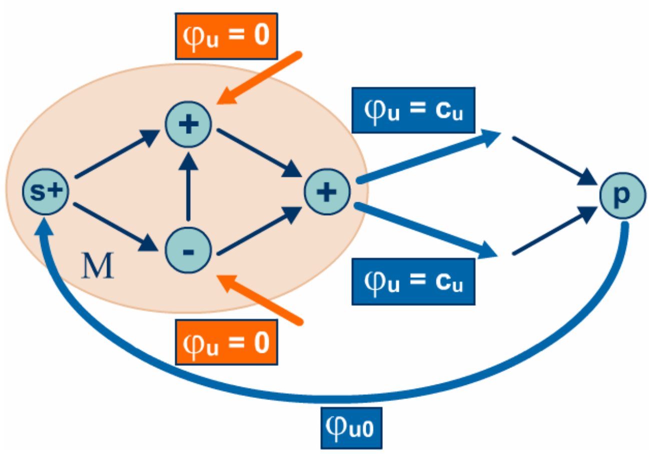
Exemple



Sur cet exemple, le puits p est marqué de "+" à partir du sommet x3 par un marquage de type extrémité à partir de l'origine, lui-même marqué de "-" à partir de x2, marquage de type origine à partir de l'extrémité, puis x2 a été marqué à partir de x1, lui même marqué à partir de la source s.

Il reste à déterminer de combien on peut faire augmenter le flot en calculant ε le minimum des augmentations possibles et des diminutions possibles :
$\varepsilon = \min(\varepsilon^+, \varepsilon^-)$ avec $\varepsilon^+ = \min(c_u - \varphi_u)$ pour $u \in \mu^+$ et $\varepsilon^- = \min(\varphi_u)$ pour $u \in \mu^-$
On augmente de ε le flux sur les arcs de μ^+ et sur l'arc de retour et on diminue de ε le flux sur les arcs de μ^-.

Cas 2 : on ne peut pas marquer le puits p
Dans le cas où la procédure de marquage s'achèverait sans que p n'ait pu être marqué, démontrons que le flot est maximal.



Soit M, l'ensemble des sommets marqués à l'issue de l'algorithme. Par hypothèse p n'est pas dans M. Les sommets marqués définissent une coupe séparant s et p.

Dans cette coupe, il y a les arcs $\omega+(M)$ qui sortent de M. Leur origine est marquée et leur extrémité non marquée. Sur ces arcs, le flux est égal à la capacité supérieure sinon par la procédure de marquage on aurait du marquer leur extrémité.

Considérons les arcs de $\omega-(M)$ qui entrent. Leur extrémité est marquée et leur origine non marquée. Sur ces arcs le flux est nul, sinon par la procédure de marquage on aurait du marquer leur origine.
Dans $\omega-(M)$, il y a également l'arc de retour avec un flux φ_{u0}.

On a vu que, quelque soit le sous-ensemble de sommets, la somme des flux entrants est égale à la somme des flux sortants.

$$\sum_{u \in \omega+(M)} \varphi_u = \sum_{u \in \omega-(M)} \varphi_u \ .$$

Pour les flux entrants, le seul flux non nul est le flux sur l'arc de retour φ_{u0}
Pour les flux sortants, sur tous les arcs la capacité supérieure est saturée $\varphi_u = c_u$

$$\sum_{u \in \omega+(M)} \varphi_u = \sum_{u \in \omega+(M)} c_u$$

et $\displaystyle\sum_{u \in \omega-(M)} \varphi_u = \varphi_{u0}$

donc $\displaystyle\varphi_{u0} = \sum_{u \in \omega+(M)} c_u$

On en déduit que la valeur du flot est égale à la capacité de la coupe associée à l'ensemble des sommets marqués.

En conséquence, on peut conclure que le flot est maximal et la coupe est de capacité minimale.
La coupe de capacité minimale est définie par l'ensemble des sommets marqués lorsque la procédure de marquage se termine sans que le puits ait été marqué.

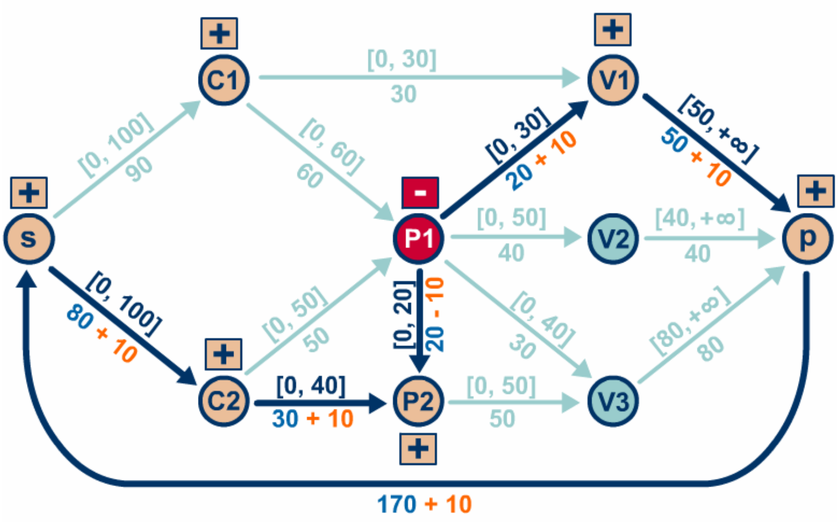
L'algorithme de Ford-Fulkerson rassemble les résultats précédents.

Algorithme de Ford-Fulkerson
Fin := FAUX
Partir d'un flot initial compatible avec les capacités
TANTQUE fin = FAUX
    Effectuer la procédure de marquage à partir du flot courant
    Si p est non marqué ALORS poser fin:= VRAI *{le flot est maximal}*
    SINON Modifier le flot à partir d'une chaîne améliorante
FINTANTQUE
FIN

A partir d'un flot initial compatible avec les capacités, l'algorithme améliore le flot tant que la procédure de marquage appliquée au flot courant permet de marquer p.

A l'issue de l'algorithme, on dispose d'un flot, compatible avec les capacités, et maximal.
On possède une information complémentaire importante : les sommets marqués définissent la coupe de capacité minimale.

Etude du réseau de distribution d'eau.



Les flux sur les arcs de ce réseau correspondent à la distribution d'eau actuelle.
On notera que les arcs issus des différentes villes ont une capacité inférieure non nulle. Nous verrons plus loin quelles modifications cela entraîne dans les résultats précédents mais pour l'instant cela ne pose pas de problème puisqu'on dispose d'un flot initial compatible avec les capacités.

1 - Le service des eaux de la ville V1, bien informé, pense qu'il est possible d'augmenter la quantité qui lui est fournie.
Afin de le vérifier, on regarde si le flot est maximal en effectuant la procédure de marquage.
Après avoir marqué la source s d'un "+", on peut marquer C1 de "+"puisque la capacité de l'arc (s, C1) n'est pas saturée.
A partir de C1 on ne peut marquer ni V1, ni P1, mais on peut marquer C2 à partir de s puis P2 à partir de C2.
A partir de P2 on peut marquer P1 de "-" car le flux sur l'arc (P1, P2) est strictement positif.
Enfin on peut marquer V1 puis p.

On a donc mis en évidence une chaîne améliorante S C2 P2 P1 V1 p qui permet d'augmenter le flot.
Le long de cette chaîne on peut envoyer 10 unités supplémentaires, la limitation provenant par exemple de l'arc (C2, P2).
Il est ainsi possible d'augmenter la quantité fournie à la ville V1. Le flot maximal passe à 180.

2 - La ville V2, voyant cela, demande aussi une augmentation, V1 ayant obtenu la sienne. Est-ce possible, sans modifier pour autant ce qui a été distribué aux 2 autres villes ?
Il faut vérifier si le flot obtenu est ou non maximal.
La procédure de marquage permet de marquer s, puis C1 puis C2. On ne peut rien marquer d'autre, tous les arcs issus de C1 ou C2 ayant leur capacité supérieure saturée.
Le flot actuel est maximal. On ne peut donc envoyer aucune quantité supplémentaire.

3 - Pendant ce temps, les responsables de la ville V3, qui auraient bien voulu également voir la quantité fournie augmenter, se proposent de financer des travaux pour augmenter la capacité des canalisations qui alimentent cette ville.

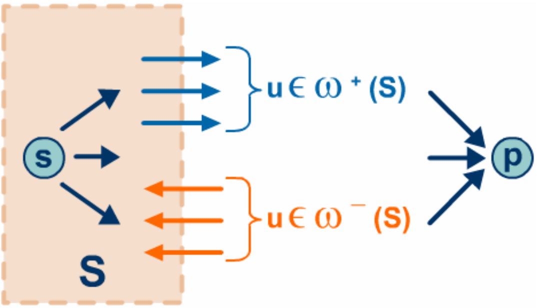
Examinons cette proposition en regardant les raisons pour lesquelles le flot est limité.
A l'issue de l'algorithme de Ford-Fulkerson, on dispose du flot maximal ; mais de plus, les sommets marqués définissent une coupe de capacité minimale.
Elle est constituée des arcs d'origine C1 et des arcs d'origine C2 (C1 et C2 sont les sommets marqués à l'issu de l'algorithme).
On peut vérifier que la capacité de cette coupe est bien égale à 180, la valeur du flot.

Tant que cette coupe existera, la valeur du flot sera limitée à 30 + 60 + 50 + 40 = 180
Les travaux prévus par la ville V3 sont donc, pour le moment, inutiles. Il faut d'abord modifier la capacité d'au moins une des canalisations issues de C1 ou de C2.

De manière générale, si on veut augmenter la valeur d'un flot maximal, il est impératif d'augmenter la capacité de la coupe minimale puisqu'un flot ne peut avoir une valeur supérieure à la capacité d'une coupe, quelle qu'elle soit.
Pour cela, il **faut** donc augmenter la capacité supérieure d'au moins un des arcs de la coupe. Il se peut que cela ne soit pas suffisant s'il existe une autre coupe de capacité égale à la valeur du flot maximal.

Cas où les capacités inférieures sont non nulles

Jusqu'à présent nous nous sommes placés dans le cas où la capacité inférieure des arcs était nulle, ce qui nous a permis de partir du flot nul pour initialiser l'algorithme de Ford-Fulkerson.
On munit les arcs de capacité inférieure b_u et supérieure c_u.
On généralise la notion de coupe et de sa capacité en introduisant les arcs entrant, c'est à dire ceux dont l'origine est hors de S et l'extrémité dans S.



Soit S, un sous-ensemble de sommets, tel que $s \in S$ et $p \notin S$
Une **coupe séparant s et p** est l'ensemble des arcs $\omega(S) = \omega^+(S) \cup \omega^-(S)$
$\omega^+(S) = \{u \in U$ / origine de u dans S et extrémité hors de S$\}$
$\omega^-(S) = \{u \in U$ / extrémité de u dans S et origine hors de S$\}$
La capacité de la coupe est égale à :
$$C(S) = \sum_{u \in \omega^+(S)} c_u - \sum_{u \in \omega^-(S)} b_u$$

Adaptation de l'algorithme de Ford-Fulkerson
Seule la procédure de marquage doit être adaptée.
Lorsqu'on marque de "-" un sommet, origine d'un arc dont l'extrémité est marquée, il suffit de changer $\varphi_u > 0$ en $\varphi_u > b_u$, le principe étant que sur ces arcs le flux peut diminuer.
La difficulté vient dans ce cas de trouver un flot initial, mais il existe des algorithmes pour cela !