Résolution analytique d'un problème de programmation linéaire - Exercices

I On reprend l'exercice VII de la leçon "Introduction à la programmation linéaire dans lequel le problème suivant a été résolu graphiquement :

Max ($3 x_1 + 4 x_2$)
$2 x_1 + x_2 \leq 8$
$x_1 + 2 x_2 \leq 7$
$x_2 \leq 3$
$x_1 , x_2 \geq 0$

a) Mis sous forme standard ce problème devient :

Max $z = 3 x_1 + 4x_2$

$$\begin{array}{llllll} 2x_1 + x_2 & + x_3 & & & = 8 \\ x_1 + 2x_2 & & + x_4 & & = 7 \\ \quad x_2 & & & + x_5 & = 3 \\ x_1,\dots,x_5 & \geq 0 & & & \end{array}$$

x_3 , x_4 , x_5 sont les variables d'écart.

On considére une première solution : $x_1 = x_2 = 0$ $x_3 = 8$ $x_4 = 7$ $x_5 = 3$ donc $z = 0$
On augmente x_2 en laissant x_1 nul. x_3 , x_4 et x_5 diminuent x_5 s'annule en premier.
Vérifier que le problème peut s'écrire sous la forme :

$$\begin{array}{llllll} 2 x_1 & & + x_3 & & - x_5 & = 5 \\ x_1 & & & + x_4 & -2 x_5 & = 1 \\ & x_2 & & & + x_5 & = 3 \end{array}$$

Avec $z = 12 + 3 x_1 - 4 x_5$

A ce système on associe une nouvelle solution :
$x_1 = x_5 = 0$ $x_2 = 3$ $x_3 = 5$ $x_4 = 1$ $z = 12$
Pourquoi n'est-elle pas optimale ?

On augmente x_1 (car $z = \mathbf{3}\, x_1 - 4 x_5 + 12$) en laissant x_5 nul. x_3 et x_4 diminuent, x_4 s'annule en premier.

Vérifier que le problème peut s'écrire sous la forme :

$$\begin{array}{llllll} & & x_3 & -2 x_4 & +3 x_5 & = 3 \\ x_1 & & & + x_4 & -2 x_5 & = 1 \\ & x_2 & & & + x_5 & = 3 \end{array}$$

Avec $z = 15 - 3 x_4 + 2 x_5$

A ce système on associe une nouvelle solution :
$x_4 = x_5 = 0$ $x_1 = 1$ $x_2 = 3$ $x_3 = 3$ $z = 15$ Non optimale .
On augmente x_5 . x_2 et x_3 diminuent. x_3 s'annule en premier
Ecrire le système d'équations et la fonction objectif de manière à permuter les rôles joués par x_3 et x_5.
Retrouver ainsi la solution optimale obtenue graphiquement.

b) Analyser graphiquement la suite des calculs.

c) Résoudre ce même problème avec Excel en partant de la solution $x_1 = x_2 = 0$
Suivre graphiquement la suite des itérations faites par le solveur d'Excel.

d) Quelle est la solution optimale suivant que p_1 =1, 4 , 6 ou 10 (p_2 reste égal à 4) ? Confirmez ainsi le résultat obtenu graphiquement exercice VII c) de la leçon "introduction à la programmation linéaire"

e) Retrouver avec Excel le résultat de la question d) de ce même exercice.

II Résoudre avec le solveur d'Excel le problème de transport classique présenté dans la leçon "Introduction à la programmation linéaire".

III Une entreprise produit 3 types d'articles P_1, P_2, P_3. Sa production hebdomadaire ne peut actuellement dépasser 500 pour le produit P_1, 200 pour le produit P_2 et 1 000 pour P_3. La fabrication de ces trois articles utilise une machine qui ne peut fonctionner plus de 45 heures par semaine, les différentes productions ne pouvant être simultanées. En 1 heure, on peut produire, soit 25 articles P_1, soit 10 articles P_2, soit 50 articles P_3. Les prix de vente unitaire des trois articles sont respectivement $p_1 = 24$, $p_2 = 40$ et $p_3 = 9$ (on peut vendre tout ce qu'on produit).

Quel est le chiffre d'affaires hebdomadaire maximal et quel est le plan de production correspondant ?