Introduction à la programmation linéaire - Exercices

I Dans un élevage de porcs, on souhaite déterminer les quantités de différents types de nourriture qui doivent être données à chaque porc afin de satisfaire des besoins en composants nutritifs et ceci pour un coût minimum.
Les unités de chacun des ingrédients nutritionnels de base contenus dans un kilo de chaque type d'aliment figurent dans le tableau suivant, qui indique également les besoins nutritionnels quotidiens et le coût des types d'aliments par kilo.

Ecrire le problème de programmation linéaire qui permet de proposer une solution à ce fermier.

Composants nutritifs	*Mais (par kilo)*	*Petit-lait*	*Végétaux*	*Nombre d'unités requises par jour*
Glucide	9	2	4	20
Protéine	3	8	6	18
Vitamine	1	2	6	15
Coût (par kg)	7	6	5	

II Une raffinerie souhaite déterminer les quantités de deux types de mélange qu'elle doit produire sur la période à venir : essence ordinaire et fuel lourd.
L'essence ordinaire est obtenue par mélange de 3 composants : butane, reformat et naphta lourd.
Ce mélange "hérite" des propriétés de ses composants en ce qui concerne les caractéristiques suivantes : indice d'octane, pression, volatilité. Une hypothèse simplificatrice consiste à supposer que l'indice d'octane d'un mélange est une combinaison linéaire des indices des constituants au prorata de leur présence dans le mélange et qu'il en est de même pour les autres caractéristiques.
Par exemple, un produit résultant d'un mélange de 30%de produit d'indice d'octane 74 avec 70% d'un produit d'indice d'octane 100 aurait un indice d'octane égal à 0,3* 74 + 0,7 * 100.
Le tableau ci-contre donne des informations sur les caractéristiques des différents constituants, ainsi que sur les normes à respecter pour l'essence ordinaire.

	composants			
Caractéristique	butane	reformat	naphta	essence
coût/unité	7,3	18,2	12,5	
Octane	120	100	74	≥94
Pression	60	2,6	4,1	≤11
Volatilité	105	3	12	≥17

On dispose par ailleurs des informations suivantes :
- on ne dispose actuellement que de 1000 unités de butane
- la constitution du mélange correspondant au fuel lourd est connue et les produits utilisés sont indépendants de ceux utilisés pour l'essence ; en revanche il est impossible de mettre en oeuvre une production totale des deux produits (essence et fuel) supérieure à 12 000 unités.

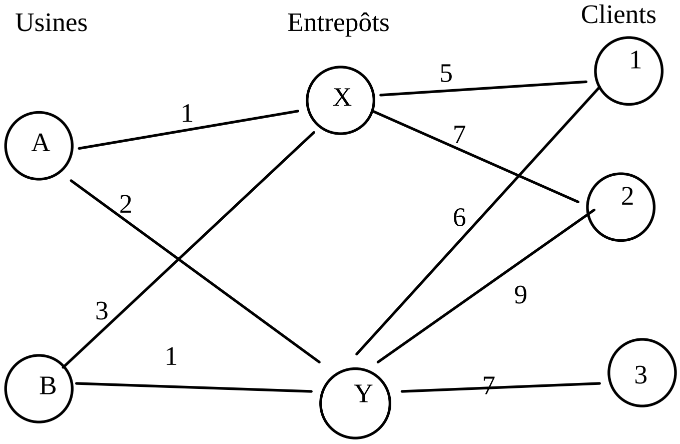
Le profit dégagé par le fuel est de 3,6 par unité produite (compte tenu du coût des composants) alors que, pour l'essence, la contribution au profit est de 18,4 par unité mais hors coût des composants. On souhaite déterminer la composition optimale des mélanges ainsi que les quantités à produire de manière à maximiser le profit.

III Le nombre d'employés nécessaires dans le service de maintenance d'une usine qui fonctionne 24h sur 24 dépend de la période horaire considérée.
Le planning est découpé en 6 périodes :
de 2h à 6h, de 6h à 10h, de 10h à 14h... de 22h à 2h
Le nombre d'employés nécessaires pour chacune de ces périodes est respectivement de : 20, 50, 80, 100, 40, 30
Chaque employé ne peut venir que pour 2 périodes consécutives.

On souhaite déterminer un planning qui minimise le nombre total de personnes.

IV - Le graphe ci-dessous représente le réseau de distribution d'une firme qui, à partir de 2 usines A et B, livre à ses 3 principaux clients les produits dont ils ont besoin ; des entrepôts intermédiaires sont prévus mais ils ne constituent que des points de transit. Les coûts de transport sont supposés être proportionnels aux quantités transportées (les coûts unitaires sont indiqués sur le graphe).

Quantités disponibles :
en A: 100
en B : 80
Quantités demandées :
par 1: 30
par 2 : 50
Par 3 : 60



Ecrire le problème de programmation linéaire permettant de déterminer le planning de transport qui permet de satisfaire les demandes avec un coût minimal.

V-Une entreprise produits 3 biens A, B et C. Ces biens peuvent être vendus en quantités illimitées aux prix de 10 pour A, 56 pour B et 100 pour C.
Le processus de fabrication des 3 biens est le suivant :
Pour produire une unité de A, il faut 1 heure de travail
Pour produire une unité de B, il faut 2 heures de travail et 2 unités de A
Pour produire une unité de C, il faut 3 heures de travail et 1 unité de B
On dispose de 40 heures de travail au maximum.

Ecrire le problème de programmation linéaire permettant de déterminer le chiffre d'affaires maximal que peut atteindre cette entreprise.
NB : Les unités de A utilisées pour produire B et celles de B utilisées pour produire C ne peuvent être vendues !

VI - Une entreprise souhaite déterminer parmi n projets ceux qu'elle a intérêt à mettre en oeuvre ainsi que la manière de les financer.
La mise en oeuvre de ces projets s'étale sur T périodes. Un projet peut être réalisé tout ou partie.
Après modélisation de son problème, on obtient le programme linéaire suivant :

$$\text{Max } \left(\sum_{j=1}^{n} c_j x_j + y_T\right)$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{1j} x_j + y_1 \leq s_1$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{tj} x_j - (1+r)\, y_{t-1} + y_t \leq s_t \quad t = 2,\dots,T$$

$$0 \leq x_j \leq 1 \quad j = 1,\dots,n$$

où: n = nombre de projets possibles
T = nombre de périodes sur l'horizon considéré
s_t= fonds disponibles en période t
a_{tj}= revenu (<0) ou dépenses (>0) du projet j en période t
c_j= cash-flow (actualisé à la date T) dégagé par le projet j postérieurement à l'horizon
r = taux d'intérêt
y_t = montant emprunté (<0) ou prêté (>0) en période t
x_j= fraction du projet mise en oeuvre

Donner une interprétation des différentes contraintes et de l'objectif.

VII Une entreprise fabrique deux produits différents P_1, P_2 à partir de trois ressources R_1, R_2 et R_3 disponibles en quantités limitées.
L'entreprise dispose de 8, 7 et 3 unités des ressources R_1, R_2 et R_3.
Les deux procédés de fabrication sont décrits par la matrice (a_{ij}) suivante (a_{ij} = quantité de ressources i nécessaire pour fabriquer une unité du produit j).

$$(a_{ij}) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- Les prix de vente p_1 et p_2 des deux biens sont respectivement 3 et 4.

a) Ecrire le programme linéaire (P) permettant de déterminer le plan de production (c'est-à-dire les quantités à produire des 2 biens) conduisant au chiffre d'affaires maximal.

b) Résoudre (P) graphiquement.

c) On suppose que le prix de vente du bien 1 varie, le prix du bien 2 restant égal à 4. Etudier graphiquement les conséquences sur le plan de production de cette variation.

d) On procède à l'acquisition d'une unité supplémentaire de la ressource 1.
Comment est modifié le plan de production ? A quel prix peut-on envisager d'acheter cette unité supplémentaire ?