Le problème du plus court chemin : Exercices

I Pour faire face à la demande des mois à venir, une entreprise souhaite déterminer le plan de production mensuel d'un bien donné qui n'est produit qu'à quelques unités.
Les prévisions de vente de ce bien sont a priori bien identifiées.
L'entreprise s'engage à satisfaire toutes les demandes sans retard.
La demande d'un mois donné peut être couverte par la production intervenant au cours de ce même mois mais on peut aussi produire de manière anticipée et constituer des stocks.
La capacité de production de chaque mois est limitée ainsi que la capacité de stockage.
Les coûts qui découlent d'une politique sont chaque mois les suivants :
- un coût de production constitué d'un coût fixe chaque fois qu'une production est lancée et d'un coût proportionnel à la quantité produite.
- un coût de stockage proportionnel à la quantité restant en stock à la fin du mois.

Enfin on ne dispose d'aucun stock initial et on souhaite terminer sans stock final.

Les données numériques sont les suivantes :
On considère les T mois à venir avec T = 4
Demande d_t : 2 unités pour chaque mois.
Capacité maximale de production : 4 unités par mois
Capacité maximale de stockage en fin de mois : 2 unités
Coût de production : Coût fixe 10, coût unitaire : 1 en période 1 et 2 , 2 en période 3 et 4
Coût de stockage unitaire : 1 en période 1 , 2 en période 2, 3 et 4

a) Montrer que la détermination d'un plan de production conduisant au coût total minimal peut être ramenée à la recherche d'un plus court chemin dans un graphe.
Construire ce graphe pour les données précédentes.
Indication : Les sommets du graphe correspondent aux couples (t,i) où t est le numéro de la période et i le stock à la fin de cette période. Par exemple (1,2) correspond à un stock de 2 en fin de période 1. On commence par un sommet (0,0).

b) Le responsable de la planification souhaite que l'on ne relance une nouvelle production que si le stock de début de période est nul.
Comment modifier la modélisation précédente ?
(NB : le graphe ne comporte plus que T+1 sommets correspondant aux dates de début de période 0, 1, …,T)

II Une entreprise vend des boites de rangement de 7 tailles différentes.
La demande pour chacune de ces tailles est connue :

	Taille 1	Taille 2	Taille 3	Taille 4	Taille 5	Taille 6	Taille 7
Volume en cm^3	34	36	38	48	52	60	66
Demandes	200	400	200	700	500	300	400

La production de ces boites donne lieu à un coût fixe de 2000 € pour une taille donnée et à un coût variable proportionnel au nombre de boites fabriquées, le coût par boite étant égal au volume de la boite.
Le cas échéant on peut satisfaire la demande pour une taille donnée par une boite de taille supérieure à condition que cela soit fait pour la totalité de la quantité demandée.
Quelles boites produire et en quelles quantités pour faire face à la demande au moindre coût ?

Montrer que ce problème peut être modélisé par un problème de plus court chemin dans un graphe.
Indication : le graphe comporte 8 sommets.

III Déterminer par application de l'algorithme de Moore-Dijkstra les plus courts chemins et les plus courtes distances du sommet a à tous les autres sommets dans le graphe suivant :