**Résolution analytique d'un problème de programmation linéaire – Exercices - corrigé**

***I*** *On reprend l'exercice VII de la leçon "Introduction à la programmation linéaire"*
....
*Mis sous forme standard ce problème devient :*

*Max* $z = 3x_1 + 4x_2$

$$\begin{array}{llllll} 2x_1 + x_2 & + x_3 & & & = 8 & (1) \\ x_1 + 2x_2 & & + x_4 & & = 7 & (2) \quad \text{système (1)} \\ \quad x_2 & & & + x_5 & = 3 & (3) \end{array}$$

$x_1, \ldots, x_5 \geq 0$

$x_3$, $x_4$, $x_5$ *sont les variables d'écart.*
.....

***Vérifier que le problème peut s'écrire sous la forme :***

$$\begin{array}{lllllll} 2x_1 & & + x_3 & & - x_5 & = 5 & (1') \\ x_1 & & & + x_4 & -2x_5 & = 1 & (2') \quad \text{Système (2)} \\ & x_2 & & & + x_5 & = 3 & (3') \end{array}$$

On passe du système (1) au système (2) par la suite des opérations suivantes, l'objectif est d'échanger le rôle de $x_2$ et $x_5$ dans le système (1) :
(3') = (3)
(1') = (1) – (3)
(2') = (2) – 2*(3)
On peut alors remplacer dans la fonction objectif $x_2$ par $3 - x_5$
$z = 12 + 3x_1 - 4x_5$

La solution $x_1 = x_5 = 0$ $x_2 = 3$ $x_3 = 5$ $x_4 = 1$ $z = 12$ n'est pas optimale car si $x_1$ augmente la fonction objectif augmente.

*On augmente* $x_1$. *(car* $z = 3x_1 - 4x_5 + 12$ *) en laissant* $x_5$ *nulle.*
$x_3$ *et* $x_4$ *diminuent,* $x_4$ *s'annule en premier.*

$$\begin{array}{lllllll} & & x_3 & -2x_4 & +3x_5 & = 3 & (1'') \\ x_1 & & & + x_4 & -2x_5 & = 1 & (2'') \quad \text{Système (3)} \\ & x_2 & & & + x_5 & = 3 & (3'') \end{array}$$

On passe du système (2) au système (3) par la suites opérations suivantes, l'objectif est d'échanger le rôle de $x_1$ et $x_4$ dans le système (1) :
(2'') = (2')
(1'') = (1') – 2 * (2')
(3'') = (3')
On peut alors remplacer dans la fonction objectif $x_1$ par $1 - x_4 + 2x_5$
$z = 15 - 3x_4 + 2x_5$

*A ce système on associe une nouvelle solution :*
$x_4 = x_5 = 0$ $x_1 = 1$ $x_2 = 3$ $x_3 = 3$ $z = 15$ *Non optimale .*
*On augmente* $x_5$ . $x_2$ *et* $x_3$ *diminuent.* $x_3$ *s'annule en premier*

***Ecrire le système d'équations et la fonction objectif de manière à permuter les rôles joués par*** $x_3$ ***et*** $x_5$***.***
***Retrouver ainsi la solution optimale obtenue graphiquement.***

Pivotage autour du coefficient de $x_5$ dans la première équation (celle de $x_3$ ) :

$$\begin{array}{llllll} & \frac{1}{3}x_3 & -\frac{2}{3}x_4 & + x_5 & = 1 & (1''') \\ x_1 & + \frac{2}{3}x_3 & -\frac{1}{3}x_4 & & = 3 & (2''') \quad \text{Système (4)} \end{array}$$

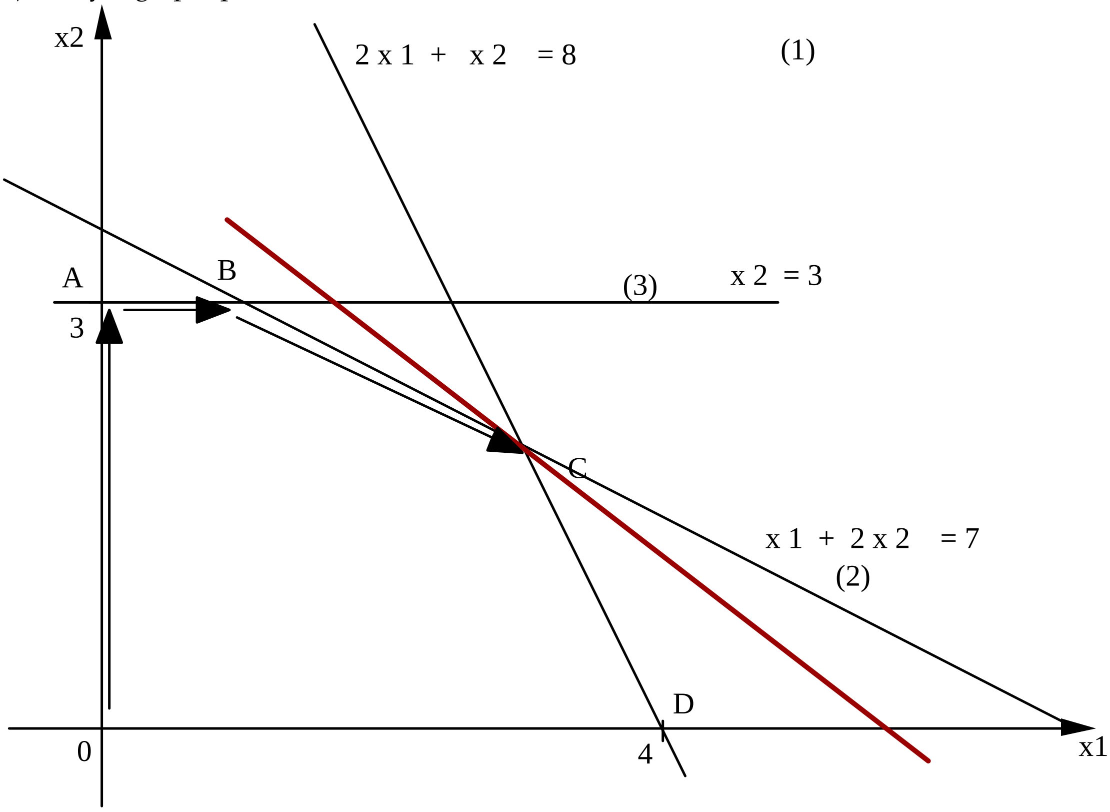
$x_2 \quad -1/3\, x_3 \quad + 2/3\, x_4 \quad = 2 \quad (3''')$

On permute les rôles de $x_5$ et de $x_3$ par la suite des opérations suivantes :
(1''') = (1'') /3
(2''') = (2'') + 2/3 * (1'')
(3''') = (3'') - (1'') /3
On remplace $x_5$ par $1 – 1/3\, x_3 + 2/3\, x_4$ dans la fonction objectif et on obtient :
$z = 17 - 2/3\, x_3 – 5/3\, x_4$

Il est alors évident que la solution qui maximise z est obtenue en prenant : $x_3 = x_4 = 0$

D'où la solution optimale :
$x_3 = x_4 = 0$ **$x_1 = 3$ $x_2 = 2$** $x_5 = 1$ **$z = 17$**.
qui coïncide avec ce qui a été trouvé graphiquement.

b) Analyse graphique de la suite des calculs :




Augmenter $x_2$ en laissant $x_1 = 0$ revient à aller de O vers A. On s'arrête lorsque $x_5$ variable d'écart de la contrainte 3 s'annule.
On augmente $x_1$ en laissant $x_5$ nulle signifie qu'on se déplace sur la contrainte (3) vers la droite.
On s'arrête au point B, lorsque $x_4$ variable d'écart de la contrainte (2) s'annule.
On fait alors à nouveau augmenter $x_5$ ( on quitte la contrainte (3) ) en laissant $x_4$ nulle : on reste sur la contrainte (2). On s'arrête en C lorsque $x_3$ variable d'écart de la contrainte (1) s'annule.

Pour les questions suivantes, voir feuille Excel L8.Exo1.cor.xls

II Voir feuille de calcul L8.Exo2.cor.xls

III Une entreprise.......

Il faut d'abord modéliser le problème.

*Variables de décision :*
$x_1$ , $x_2$ , $x_3$ quantités à produire de chaque produit.

*Contraintes*
Limitation des productions
$x_1 \leq 500$
$x_2 \leq 200$
$x_3 \leq 1000$

Contrainte portant sur le nombre d'heures utilisables :
Si en 1 heure on fabrique 25 unités du bien 1, pour en fabriquer $x_1$ il faut $x_1$ /25 heures.
De même pour les deux autres biens, d'où la contrainte :
$x_1 /25 + x_2 /10 + x_3 / 50 \leq 45$

*Objectif*
Max ( $24 x_1 + 40 x_2 + 9 x_3$)

*Bilan :*

$$\text{Max } ( 24 x_1 + 40 x_2 + 9 x_3)$$

$$\begin{array}{lllll}
x_1 & & & & \leq 500 \\
 & x_2 & & & \leq 200 \\
 & & x_3 & & \leq 1000 \\
x_1 /25 & + x_2 /10 & + x_3 / 50 & & \leq 45 \\
x_1 , x_2 , x_3 \geq 0 & & & &
\end{array}$$

Pour la résolution voir feuille Excel L8.exo3.cor.xls