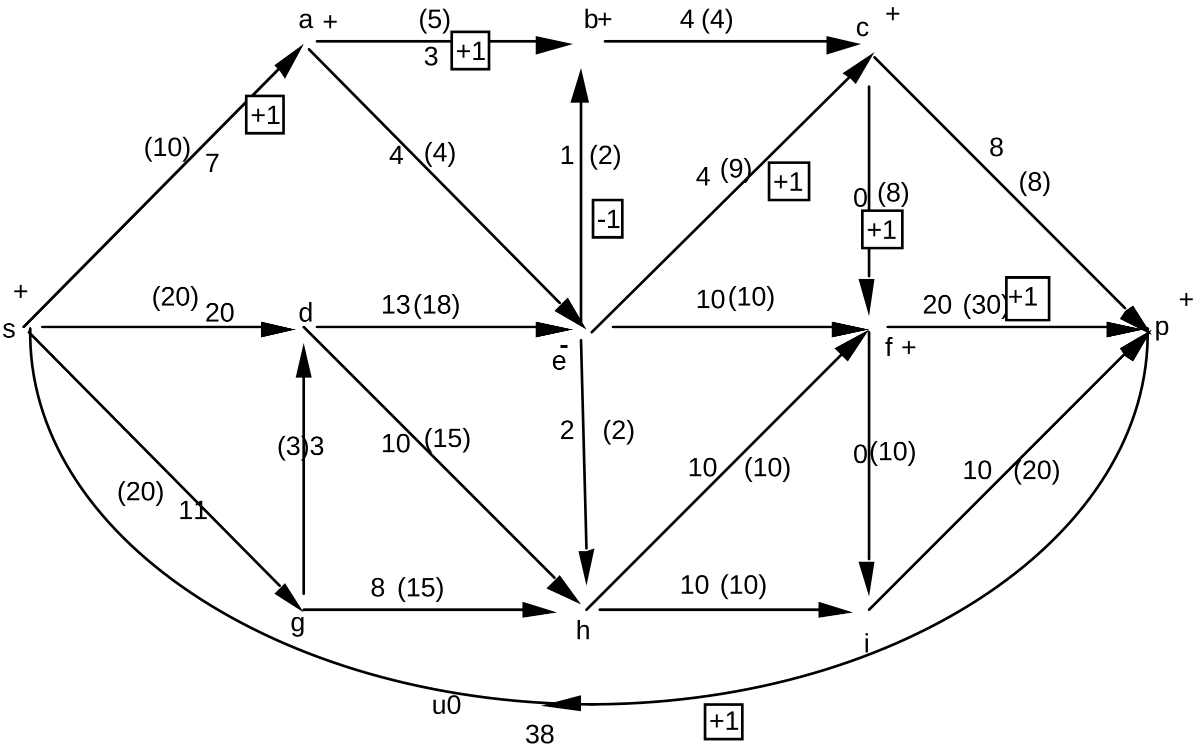
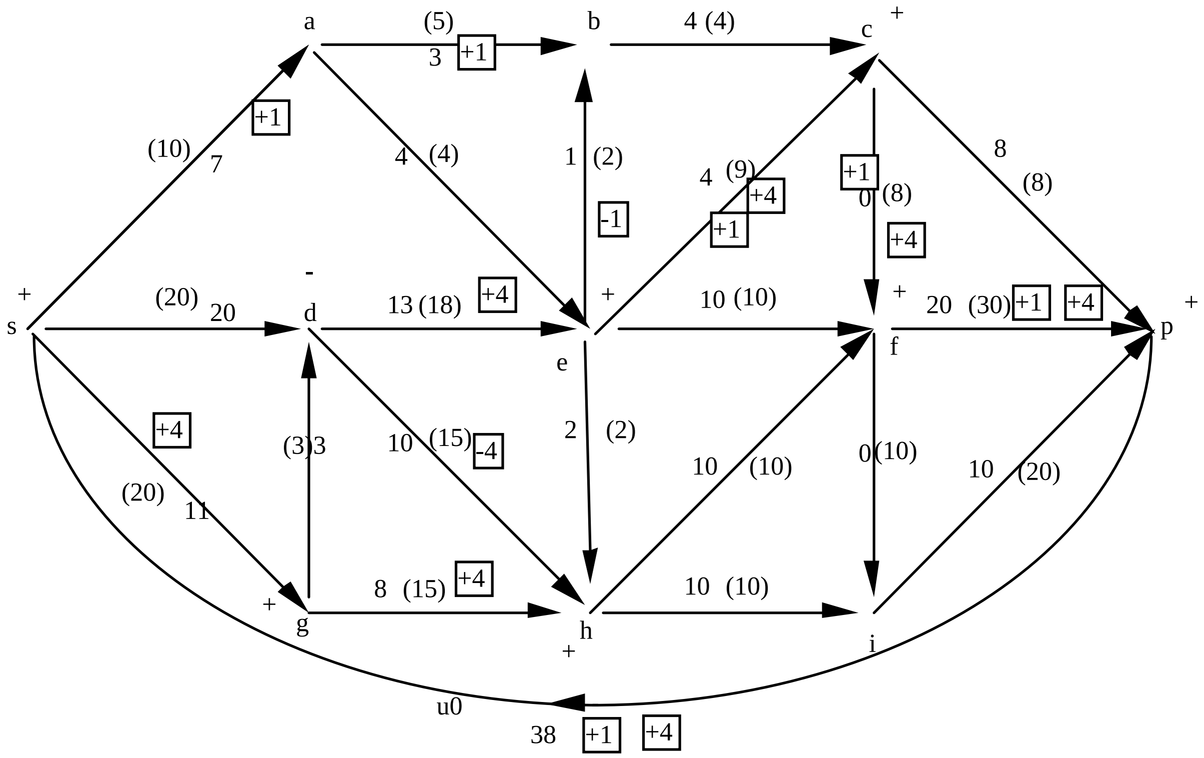
Le problème du flot maximal– Exercices -corrigé

I Déterminer sur le réseau suivant, ...(reprendre le graphe sur l'énoncé)
On procède successivement aux marquages suivants :
(d'autres suites sont possibles, ici on prend systématiquement le premier sommet susceptible d'être marqué)
Première itération de l'algorithme de Ford Fulkerson :
Procédure de marquage :
s+ a+ b+ e- (car le flux sur (e,b) est >0) c+ f + p+ : p est marqué.
Modification du flot :
ε+ = 2 (arc (a,b)) ε- = 1 (arc (e,b)) ; on peut donc envoyer un flot de valeur 1 le long de la chaîne
s a b e c f p : le flux augmente de 1 sur tous les arcs sauf sur (e,b) où il diminue de 1.
La valeur du flot passe à 39.



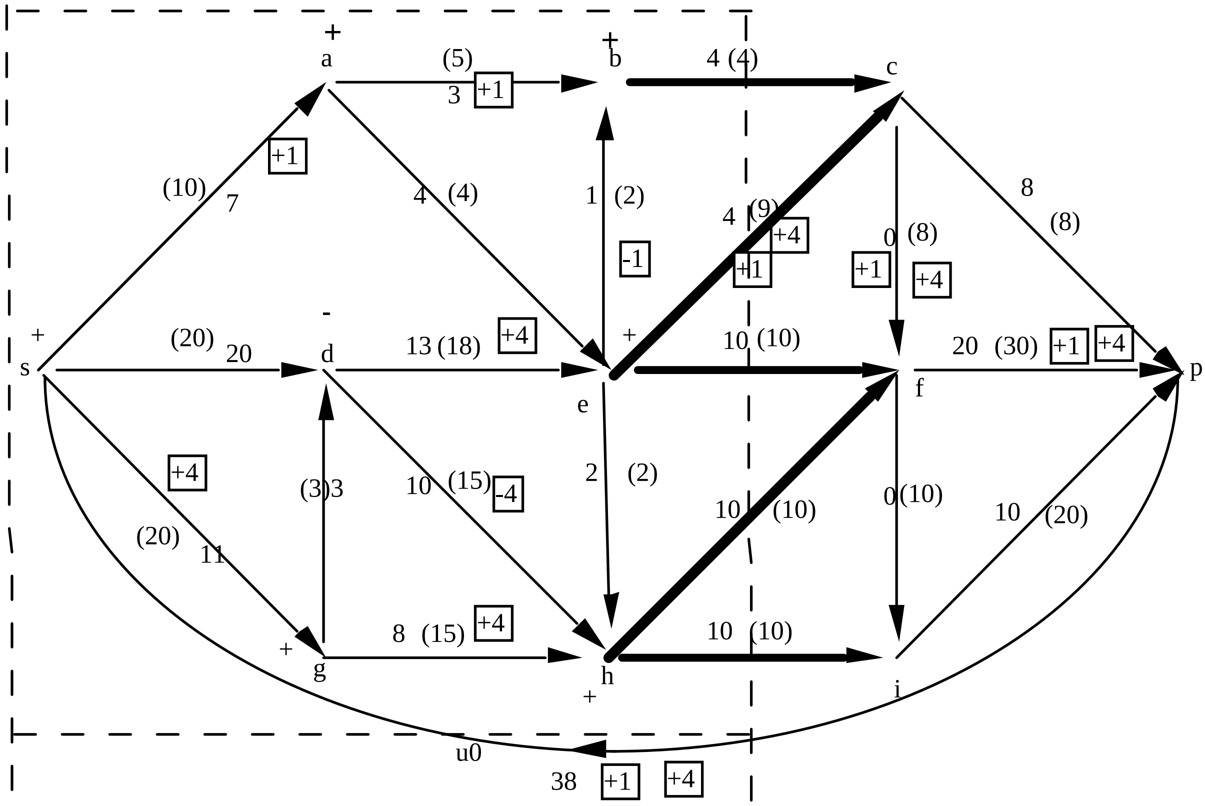
Deuxième itération
Procédure de marquage :
s + a+ b+ , on ne peut aller plus loin ; on repart de s.
On marque alors g+ h + d- e + c+ f+ p+ . p est marqué.
Modification du flot :
ε+ = 4 (arc (e,c) ε- = 10 (arc (d,h)) on peut donc envoyer un flot de 4 le long de la chaîne
s g h d e c f p : le flux augmente de 4 sur tous les arcs sauf sur (d ,h) où il diminue de 4.
La valeur du flot passe à 43.



Troisième itération

Procédure de marquage :

s+ a + b+ puis à nouveau à partir de s : g+ h+ d- e + on ne peut rien marquer d'autres, le flot est maximal.



L'ensemble des sommets marqués est { s, a , b , d , e , g , h}

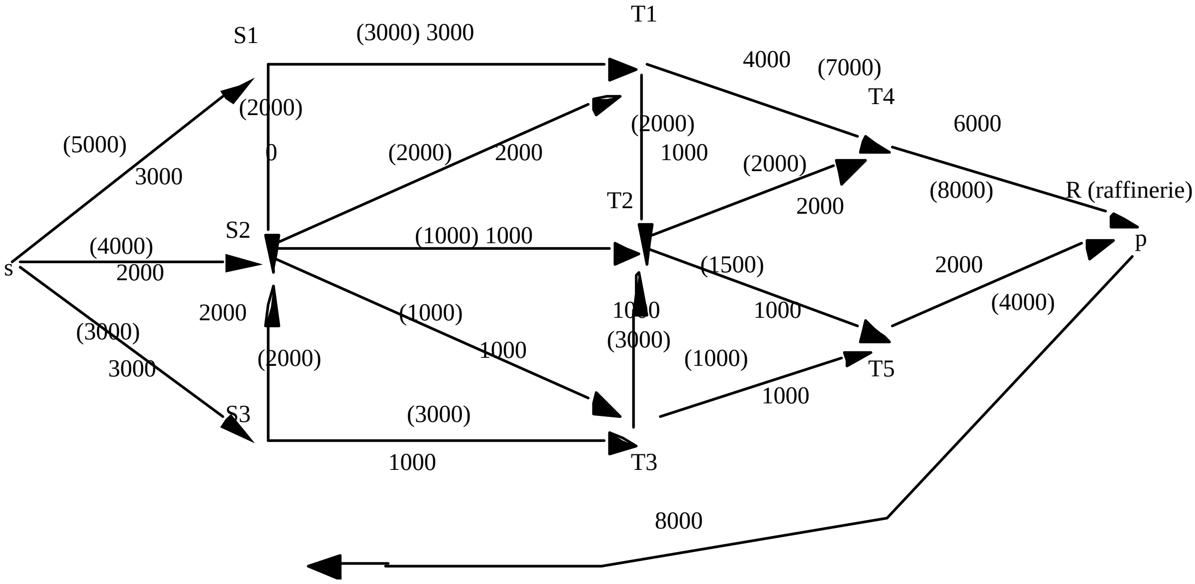
La coupe associée est constituée des arcs dont l'origine est marquée et l'extrémité non marquée : (b,c) (e,c) (e,f) (h, f) (h, i) . La capacité de cette coupe est :

4 + 9 +10 + 10 = 10 = 43

Ceci confirme que le flot précédent est optimal.

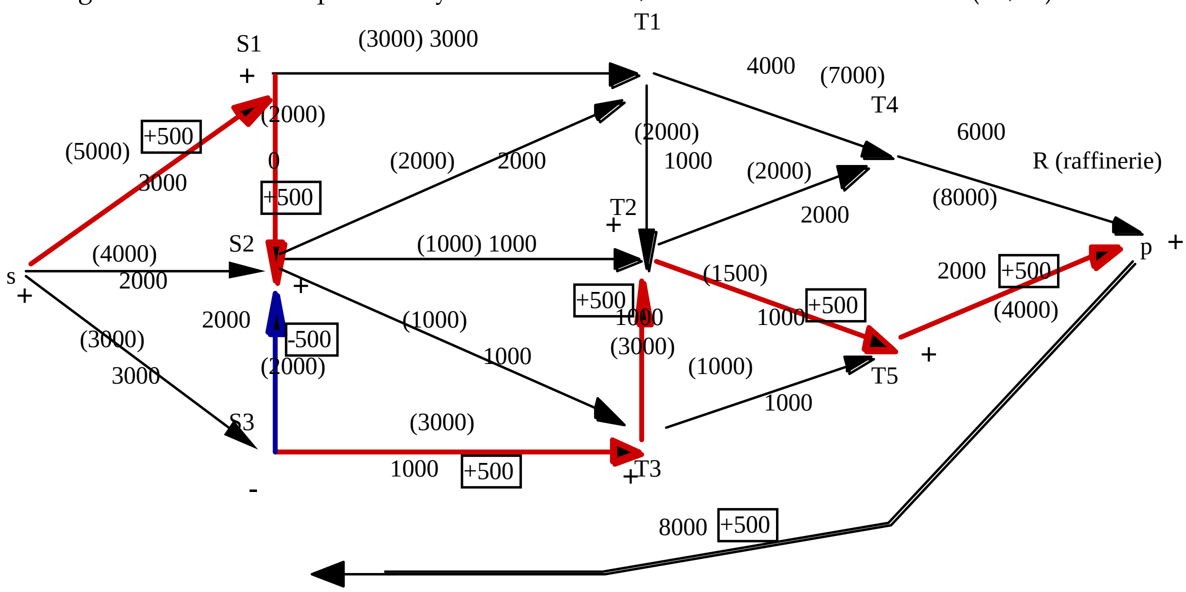
II Une raffinerie de pétrole........

a) On complète le graphe par une "supersource" s et les arcs (s,S1) , (s,S2) , (s,S3) que l'on munit d'une capacité supérieure égale à la quantité qui peut être délivrée par chacun des puits.
La conservation des flux aux sommets S1, S2, S3 permet de limiter ce qui part de chacun des puits à ce qu'ils peuvent fournir.

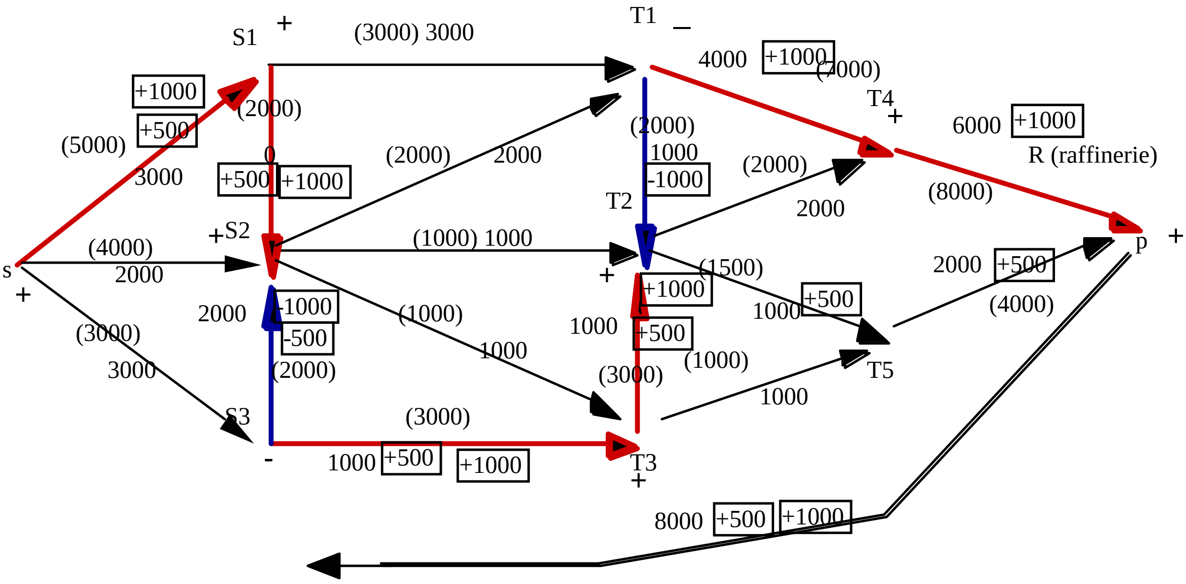


Actuellement il arrive une quantité de 8000 à la raffinerie.
Pour voir si cette quantité est maximale, on recherche s'il existe une chaîne améliorante qui permettrait d'augmenter la valeur du flot.

Marquage 1 :
s, S1, S2 , S3 (-) , T3, T2, T5, p .
Le long de cette chaîne on peut envoyer un flot de 500, la limitation est due à l'arc (T2,T5).

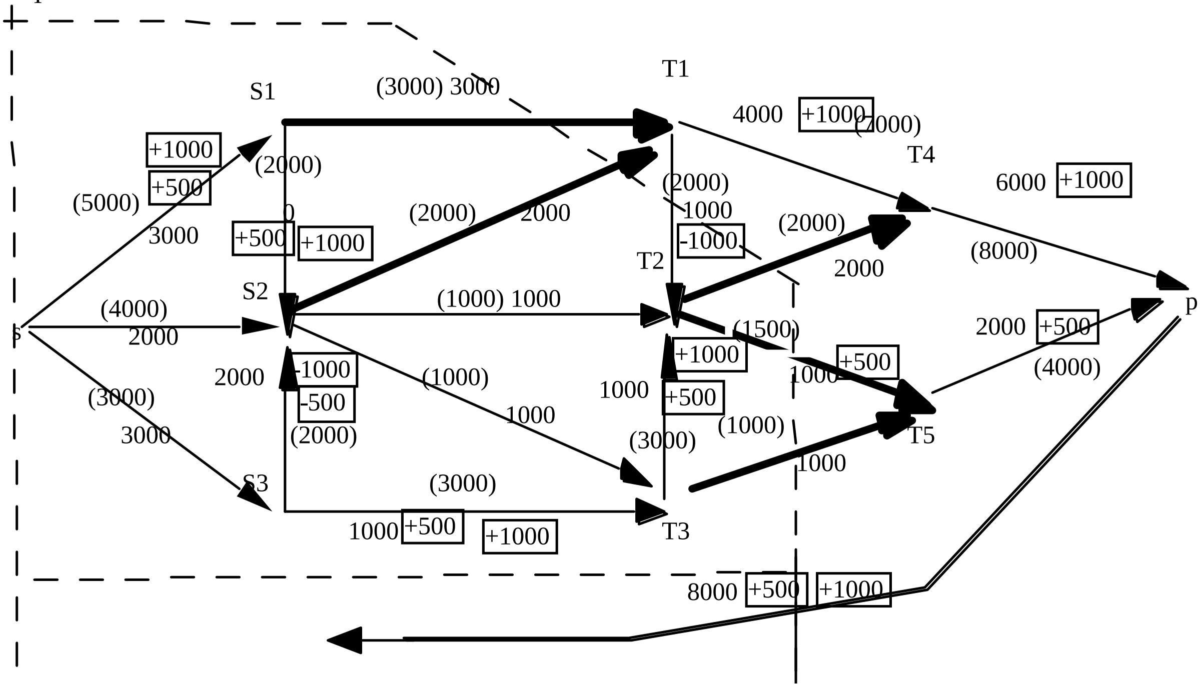


Marquage 2
s, S1, S2, S3(-), T3, T2, T1 (-), T4, p
Le long de cette chaîne on peut envoyer un flot de 1000, la limitation est due à l'arc (T1,T2) sur lequel le flux ne peut pas diminuer de plus de 1000.



Marquage 3
s, S1, S2, S3,T3, T2 .... et c'est tout.
Arcs de la coupe (S1,T1) (S2,T1) (T2,T4) (T2,T5) (T3,T5)

Capacité = 3000 + 2000 + 2000 + 1500 + 1000 = 9 500



b) Afin d'augmenter encore cette quantité, doit-on augmenter la capacité des sources, ou celle de certains éléments de pipe-line? Dans l'un ou l'autre cas préciser lesquels.

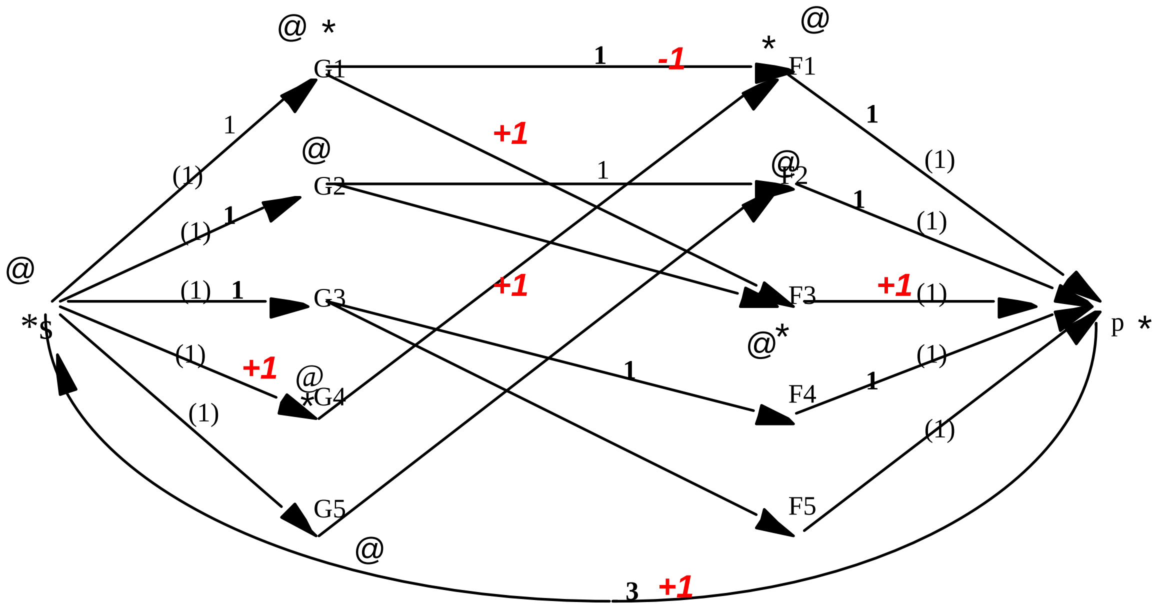
Pour augmenter la quantité envoyée à la raffinerie, il faut impérativement augmenter la capacité d'au moins un des arcs de cette coupe.

III Cet exercice correspond à un problème connu sous le nom de " La promenade des demoiselles".
Le responsable d'un ....

a) Ce problème peut être modélisé par un problème de flot maximal sur le graphe suivant : justifier ce résultat.

Compte tenu de la contrainte de capacité supérieure de 1 sur les arcs (s,Gi) et (Fj,p) et de la conservation des flux aux sommets G_i et F_j un flot sur le graphe précédent est tel que le flux ne peut être égal à 1 que sur un seul arc issu de chaque sommet Gi et sur un seul arc d'extrémité Fj : on pourra donc associer à un arc (Gi,Fj) sur lequel le flux vaut 1 un couple (Gi,Fj). Pour avoir le maximum de couples il faut donc déterminer le nombre maximum d'arcs sur lequel le flux vaudra 1. Ce nombre d'arcs est comptabilisé sur l'arc de retour. Il s'agit donc de déterminer le flot maximal sur le réseau proposé.

b) Le responsable du ....



Les arcs de type (s,i) et (j,p) sont munis de capacité supérieure égale à 1 (entre parenthèses sur le graphe) et inférieure nulle.
Les arcs (i,j) sont uniquement munis de capacité inférieure nulle.
Les seuls flux mentionnés sur ce graphique sont les flux non nuls.
Initialement le flux est égal à 1 sur les arcs (s,G1) (s,G2) et (s,G3) , (G1,F1) ,(G2,F2) ,(G3,F4) , (F1,p) (F2,p) (F4,p) .
Il a pour valeur 3 et représente la situation actuelle.
Pour voir si on peut constituer d'autres couples on cherche à augmenter ce flot.
L'application de l'algorithme de Ford Fulkerson conduit à deux itérations correspondant aux marquages indiqués sur le graphe par :
* = premier marquage
@ = deuxième marquage

On procède au marquage des sommets :
Premier marquage : s , G4 ,F1 , G1(marquage à partir de F1 possible car le flux est égal à 1) ,F3 , p
p étant marqué on a mis en évidence une chaîne augmentante à partir de laquelle on peut augmenter le flot de 1 : augmentation de 1 sur (s,G4) (G4,F1) (G3 , p) et l'arc (p , s) et diminution de 1 sur (G1, F1) .
La valeur du flot est maintenant de 4.

Deuxième marquage : s , G5 , F2, G2 , F3 , G1 (marquage de G1 possible car il y a un flux de 1 sur l'arc (G1,F3) , F1 , G4. STOP on ne peut plus marquer de sommet . p n'est pas marqué , le flot actuel est maximal.
Sommets marqués à l'issue de l'algo :
s G1, G2, G4, G5, F1, F2 , F3

Arcs de la coupe de capacité minimale = arcs dont l'origine est marquée et l'extrémité non marquée : (s,G3) , (F1,p) ,(F2,p) ,(F3,p) . Tous ces arcs ont 1 comme capacité. La capacité de la coupe est donc bien de 4.
On a donc une nouvelle solution avec les couples : (G1,F3) (G2, F2) (G3,F4) (G4,F1)

c) La solution que vous venez de trouver ....

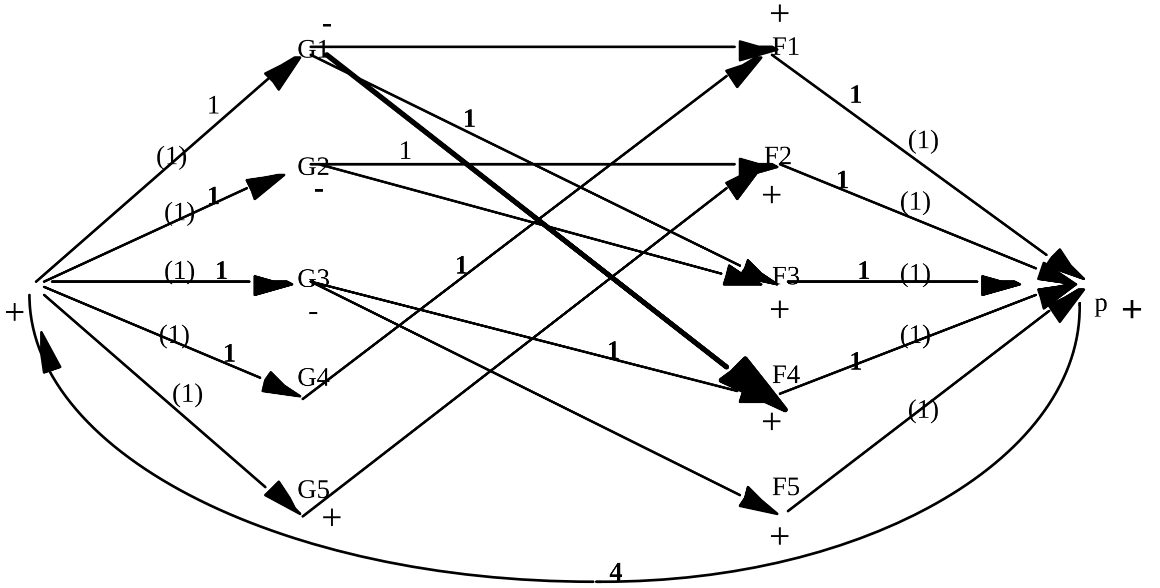
La création de l'arc (G3,F2) ne permet pas de mener la procédure de marquage jusqu'à p, puisque G3 n'est pas marqué. Le flot maximal reste de valeur 4 et donc le nombre de couples de 4.

*Quelles sont, pour vous, **toutes** les relations* **....**

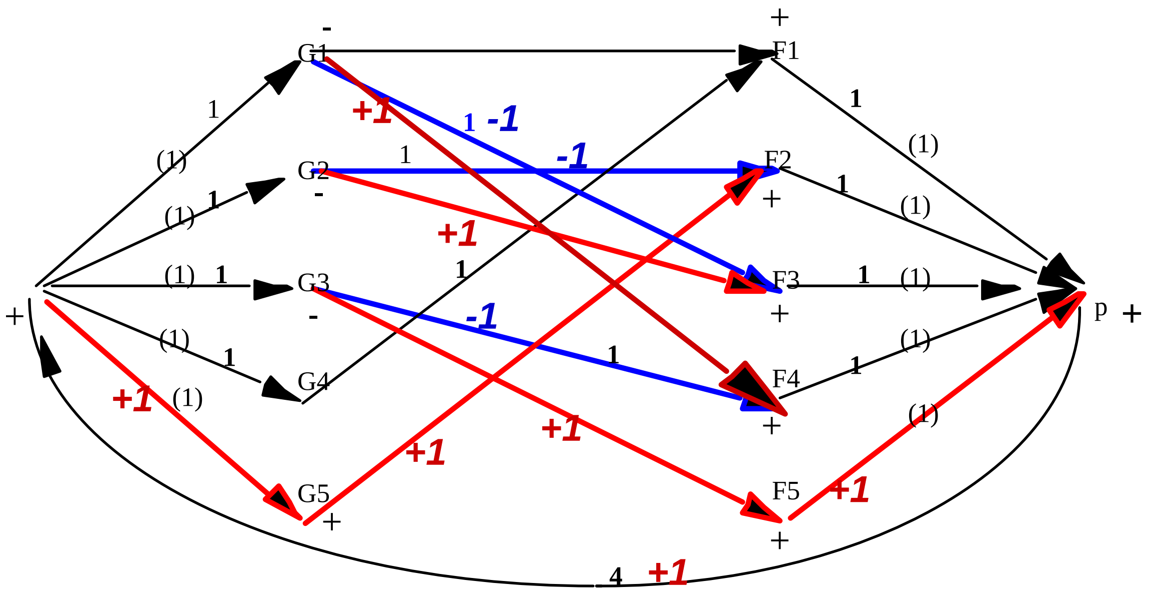
Augmenter le nombre de couples est équivalent à augmenter la valeur du flot. Pour cela il faut détruire la coupe de capacité minimale en ajoutant un arc dont l'origine est marquée et l'extrémité non marquée.
L'ensemble des liaisons possibles susceptibles de provoquer la création d'un 5ème couple est donc :
de G1, G2 , G4 ou G5 vers F4 ou F 5.

d) On suppose que G1 accepte de sortir avec F4 (et réciproquement !), ...

On ajoute l'arc (G1,F4). On peut alors procéder au marquage suivant (sur le graphe la solution à 4 couples a été reportée)



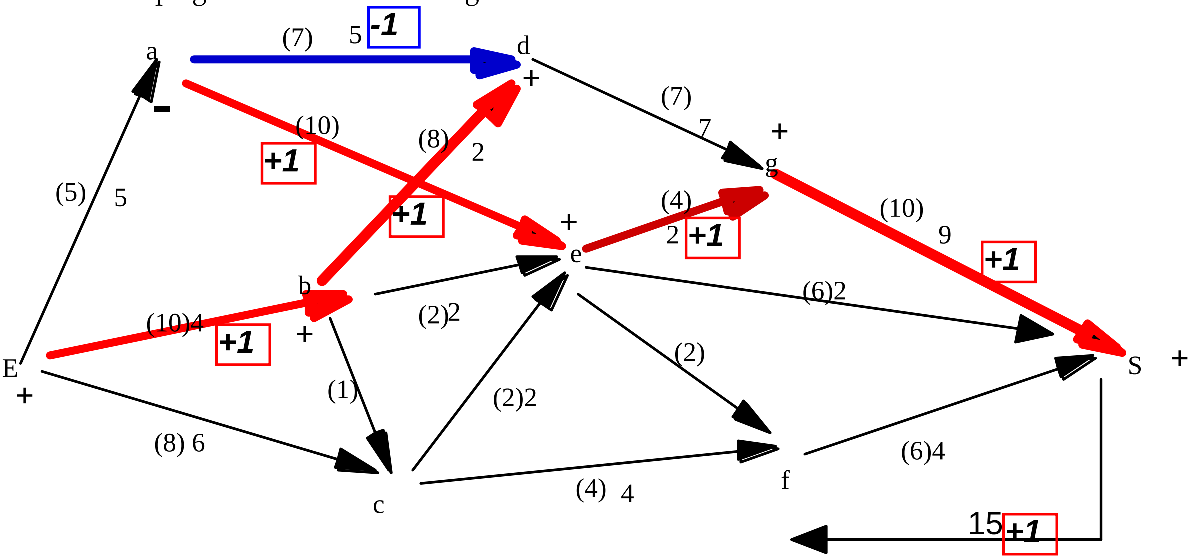
On marque dans l'ordre s G5 F2 G2 F3 G1 (éventuellement F1 et G4 mais cela ne permet pas d'arriver en p).
A partir de G1 on marque F4 , G3, F5 et enfin p. Les sommets G sont marqués de – sauf G5 et les sommets F qui sont marqués de + .
On procède alors à la modification des flux le long de la chaine s G5 F2 G2 F3 G1 F4 G3 F5 p



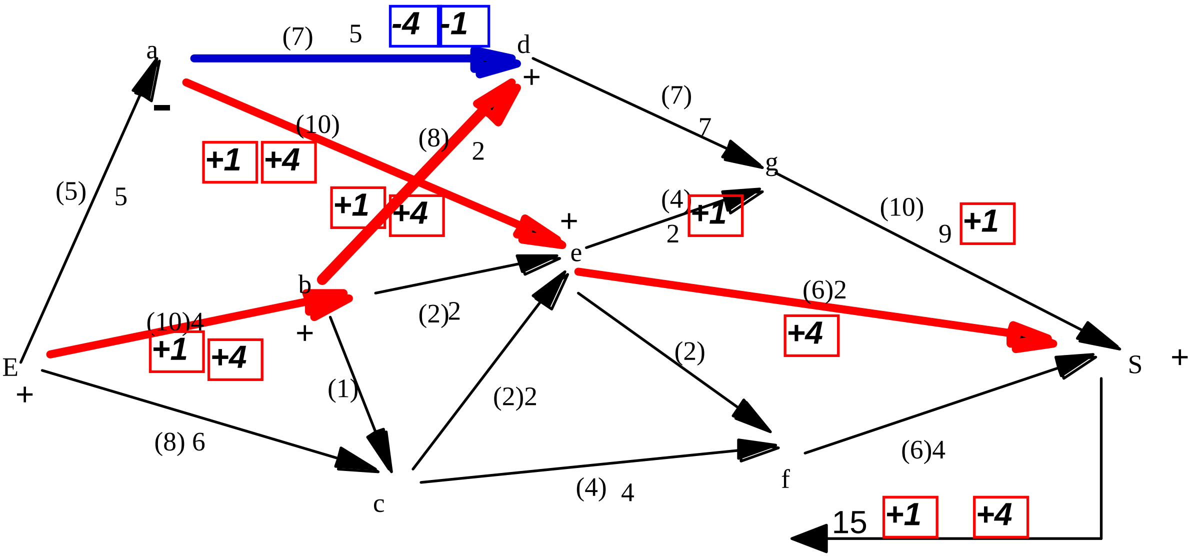
On arrive alors à la situation : (G1,F4) (G2,F3) (G3,F5) (G4,F1) (G5,F2).

IV Le graphe ci-dessous représente le réseau routier permettant d'aller de la ville E à la ville S.
....

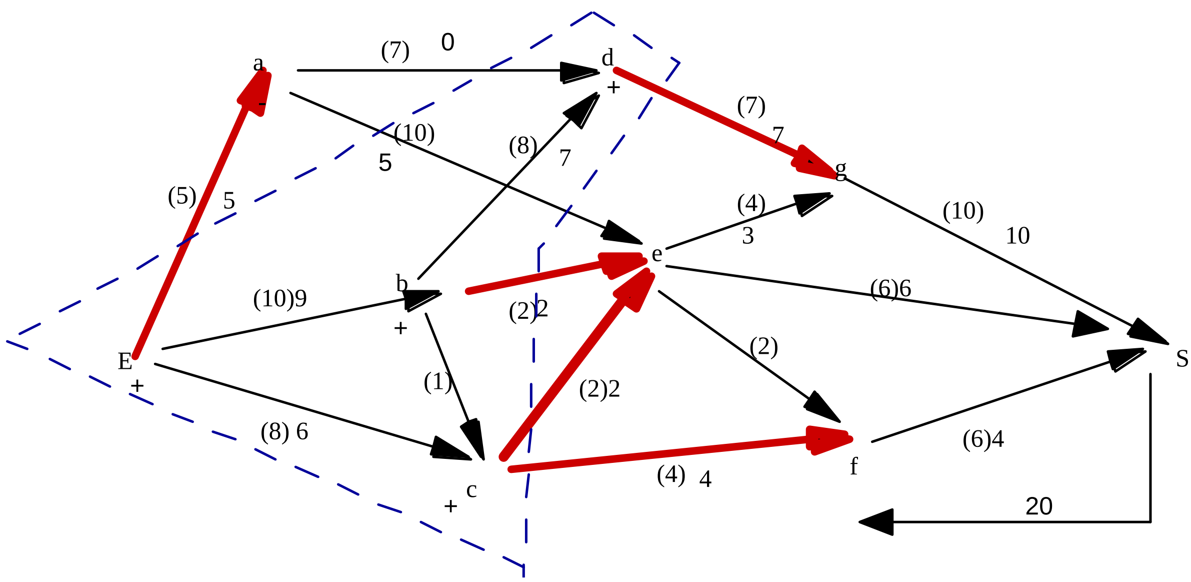
a) Que pensez vous du diagnostic de Monsieur R ? .....
Premier marquage : la valeur du flot augmente de 1



Deuxième marquage : la valeur du flot augmente de 4.



Troisième marquage :
Les sommets marqués sont s, b , c , d .
On ne peut plus marquer p. Le flot est maximal.



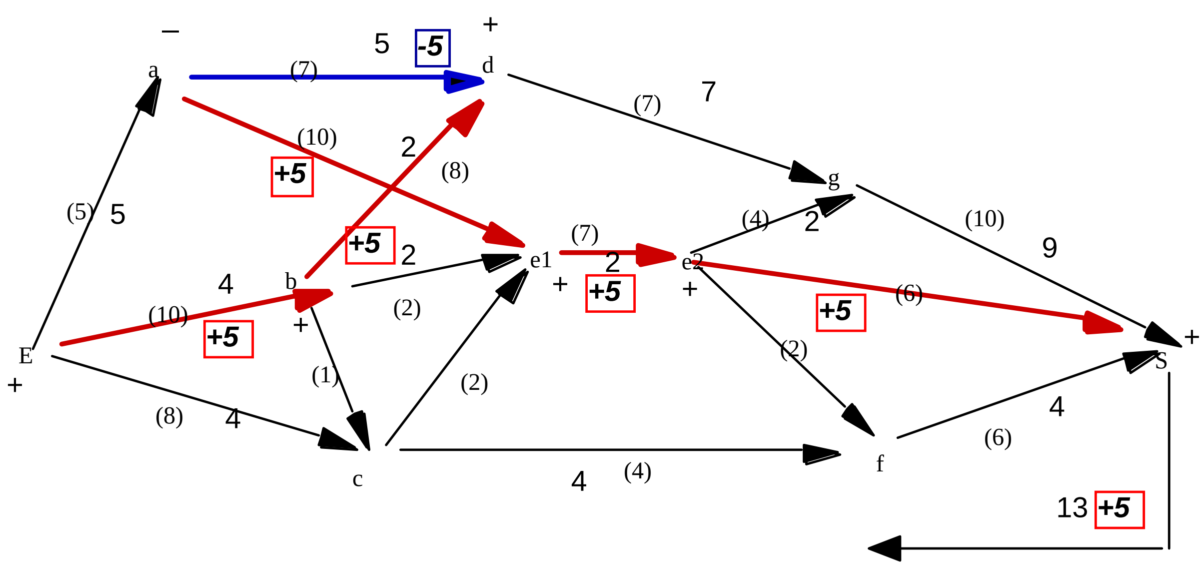
On obtient un flot de valeur 20.
La coupe de capacité minimale est constituée des arcs (E,a) , (d,g) , (b,e) , (c,e) et (c,f). On vérifie que la somme des capacités supérieures des arcs de cette coupe est bien égale à 20, ce qui limite la valeur du flot.
L'augmentation du trafic passe nécessairement par l'augmentation de la capacité d'un de ces arcs.

b) Dans l'analyse précédente, il n'a pas été tenu compte du nombre maximal de véhicules pouvant traverser les agglomérations..........

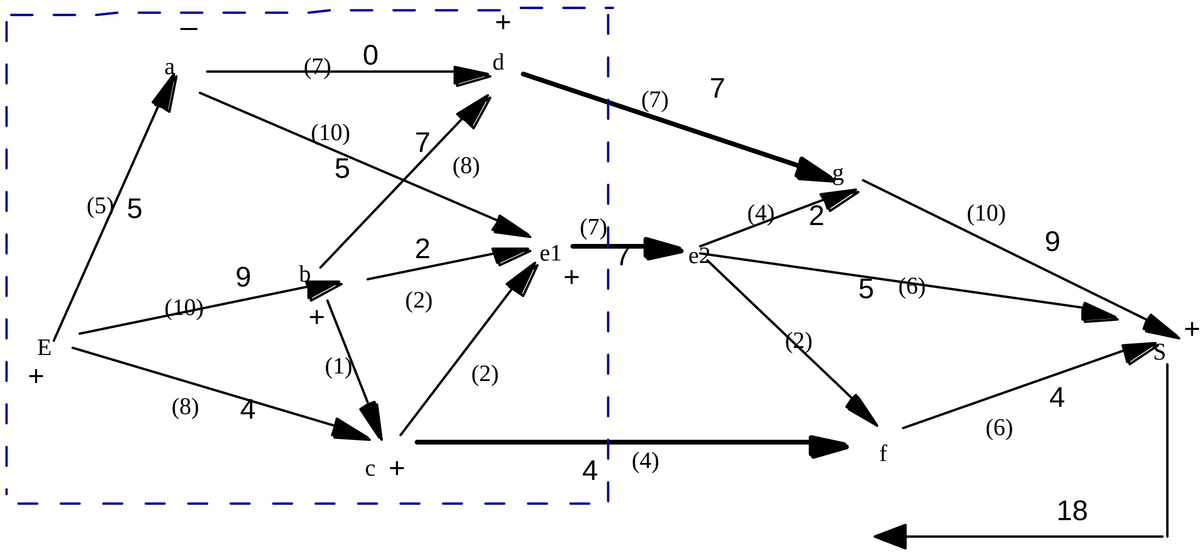
Sur ce nouveau graphe, la conservation des flux au sommet e1 implique que ce qui arrive en e1 est égal à ce qui en part ; cette dernière quantité sera limitée par la capacité de 7de l'arc (e1 ,e2)
L'arc (e1,e2) joue le rôle de compteur.

2 - *Déterminer alors le ....*

On ne peut partir du flot précédent qui n'est pas réalisable puisqu'actuellement le trafic qui passe par la ville "e" est de 9.
Pour trouver le trafic maximal, on repart du flot identiquement nul *(NB : il existe des algorithmes qui permettraient de partir du flot précédent.)* ou du flot donné initialement qui est réalisable.
On peut alors procéder à une nouvelle itération de l'algorithme de Ford Fulkerson.



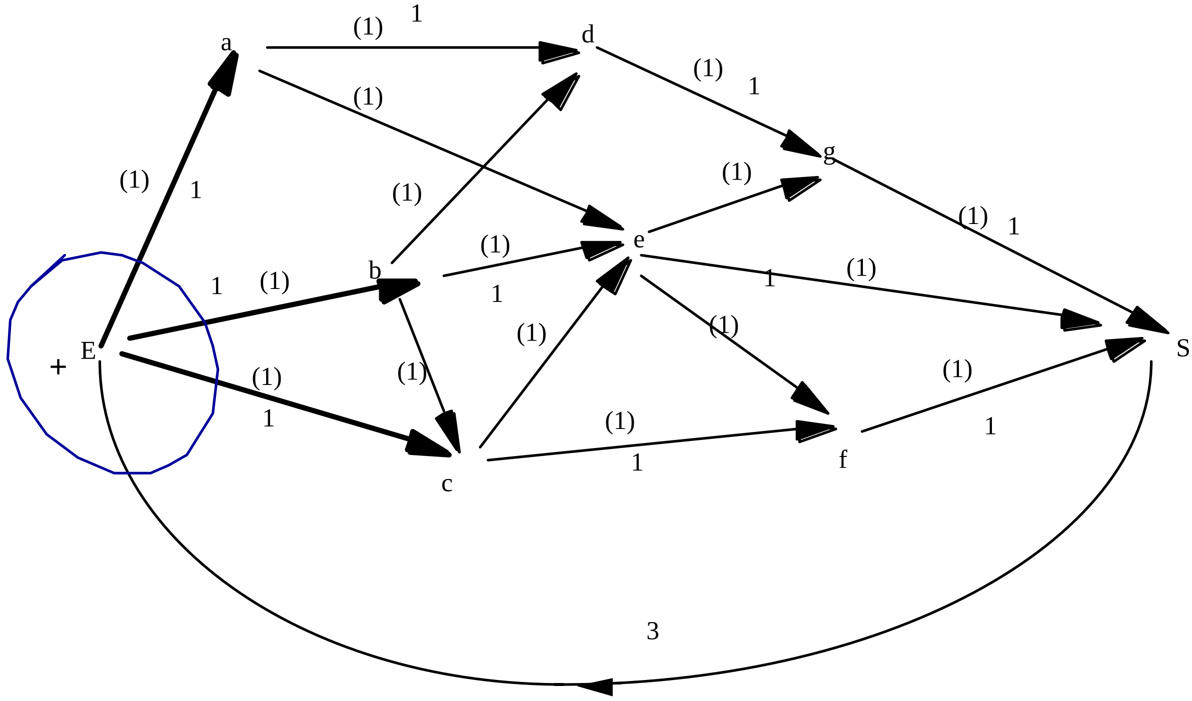
A partir de ce nouveau flot, la procédure de marquage ne permet plus de marquer le sommet S : le flot est maximal.



On constate qu'il sature l'arc (e1,e2) : la traversée de la ville "e" atteint donc le maximum.
La coupe de capacité minimale est constituée des arcs (d,g) (e1,e2) (c,f) dont la capacité est bien de 18.
Une augmentation de la capacité du réseau doit passer par l'augmentation de la capacité des axes routiers (d,g) ou (c,f), ou par l'amélioration de la traversée de la ville "e ".

c) Suite à une campagne de sécurité ....

1 - Quelque soit le sous-ensemble de sommets A contenant la ville E et ne contenant pas la ville S , tout trajet de E à S passe par un arc de $\omega^+(A)$.
Pour être certain que tous les véhicules seront contrôlés sur leur trajet il suffit de mettre un radar sur chaque arc de $\omega^+(A)$. Si on munit tous les arcs d'une capacité supérieure de 1, le nombre de ces arcs est égal à la capacité de la coupe associée à A. Pour avoir le nombre de radars le plus faible possible il faut prendre une **coupe de capacité minimale** que l'on détermine en résolvant le problème du flot maximal sur ce réseau.
On trouve par exemple le flot suivant qui est évidemment maximal



A la dernière itération de l'algorithme de Ford Fulkerson le seul sommet marqué est le sommet E.
La coupe de capacité minimale est donc $\omega+$ ({E}) = { (E,a) , (E , b) , (E , c) } de capacité 3;
Le nombre minimal de radars est donc de 3 que l'on peut placer le long des routes issues de E.

2 - La sécurité routière constate que, ...

A partir du dernier flot obtenu à la question précédente on obtient, suite à la création de l'arc (E,d), un nouveau marquage indiqué sur le graphe ci-dessous.

On peut maintenant marquer le sommet d, donc a (par "-") puis e , puis g , à partir de e on peut marquer b par "-" , puis c puis f. Tous les sommets sont marqués sauf S. La valeur du flot ne peut être augmentée par l'adjonction de ce nouvel arc, ce qui veut dire que le nombre de radars n'augmentera pas. Mais la coupe de capacité minimale est maintenant constituée des arcs (g,S), (e,S) et (f,S) où doivent maintenant être placés les radars.