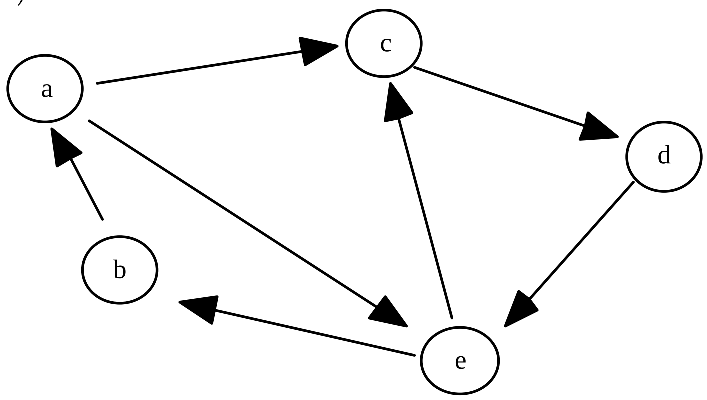
**Les graphes : un outil de modélisation – exercices - corrigé**

I – Objectif de l'exercice : se familiariser avec le vocabulaire des graphes.

a)




b) Avec cette représentation graphique on "voit" qu'il existe un circuit a, c , d , e, b, a qui implique que tous les sommets sont racine : il existe un chemin entre n'importe quel couple de sommets.
- Il existe plusieurs circuits : a,e,b,a c,d,e,c a,c,d,e,b,a .....
- Le sommet a est racine donc il existe un chemin de a à tous les sommets du graphe.

c) Succ(a) = {c, e} Succ (b) = {a} Succ (c) = {d} Succ (d) = {e} Succ (e) = {b, c}

Pred (a) = {b} Pred (b) = {e} Pred (c) = {a , e} Pred (d) = {c} Pred (e) = {a, d }

NB : Ici on peut évidemment utiliser la représentation graphique pour déterminer les éléments succ(.) et pred(.), mais il faut pouvoir décrire ces ensembles en parcourant le tableau donné dans l'énoncé.

d)

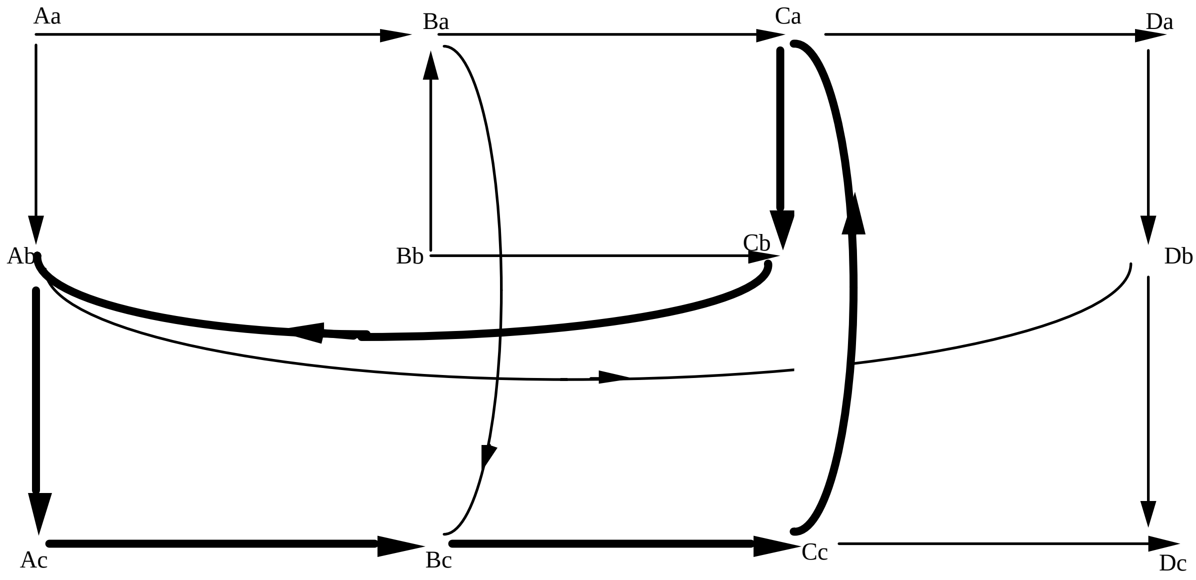
| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 0 | 0 |

Même remarque : on peut construire cette matrice, sans avoir la représentation graphique. En connaissant les successeurs, on a les lignes de la matrice; à partir des prédécesseurs, on a les colonnes.

II On représente l'organisation du tournoi par un graphe non orienté dont les sommets correspondent aux équipes et les arêtes aux rencontres.
Chaque sommet est relié à 7 autres sommets.
Le nombre d'arêtes est donc égal à 11*7 /2 puisqu'une arête est comptée 2 fois : une fois à partir de chacune de ses extrémités.
Or 11*7 est impair, il n'est pas divisible par 2 et ne peut donc être égal à un nombre d'arêtes qui est nécessairement entier.
C'est une application du lemme des poignées de main.

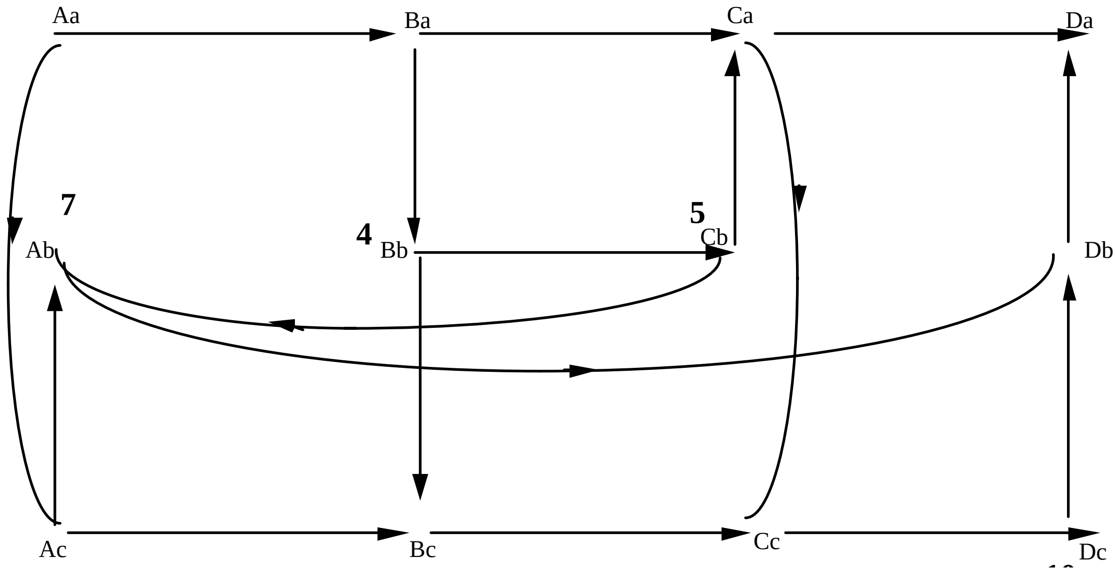
III Si on double chaque pont, et qu'on le représente avec un arc dans chaque sens tous les sommets du graphe deviennent de degré pair. Le résultat donné par Euler (cf poly) indique qu'on peut alors trouver un circuit passant par tous les ponts une fois dans chaque sens.

IV Les sommets correspondent aux couples tâche – machine.
A - a) On a le graphe suivant



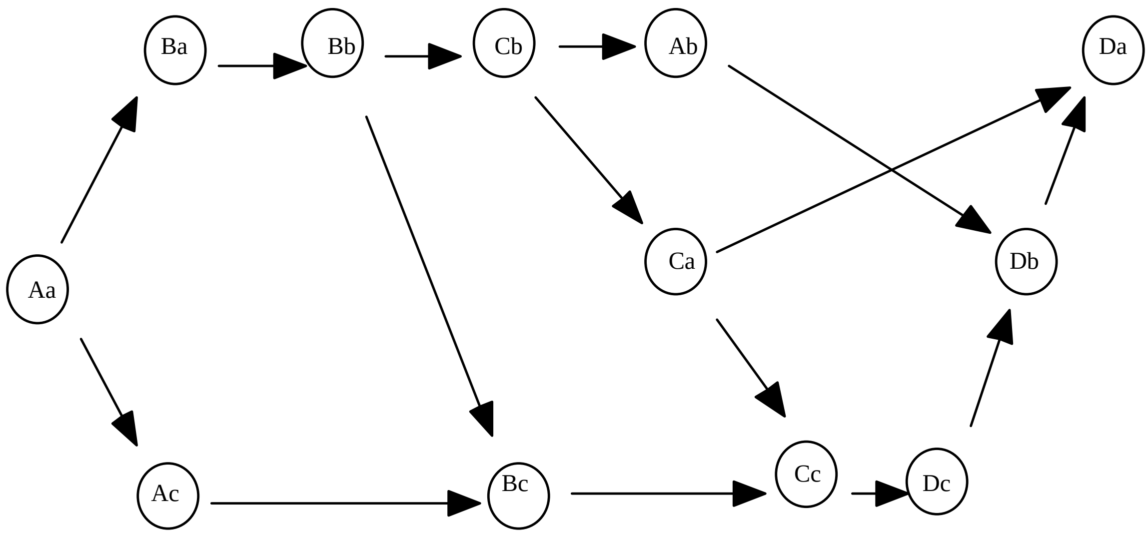

Une numérotation par le tri topologique donne :
Num(Aa) = 1  (sommet sans prédécesseur)
Num (Bb) = 2  (sans prédécesseur)
Num (Ba) = 3
Ensuite on ne peut plus trouver de sommets sans prédécesseur. Ce graphe possède un circuit, qui est visualisé en gras.
NB : L'algorithme n'indique pas où est ce circuit.

b) Idem mais sur le graphe ci-dessous. Une numérotation possible est :




On vérifie que tous les sommets sont numérotables par le tri topologique.

B) La représentation suivante permet de mieux visualiser l'"organisation" du graphe.




On "voit" alors sur ce graphe qu'il existe un chemin Aa, Ba, Bb, Cb, Ca, Cc, Dc, Db, Da qui représente une succession d'opérations pour lesquelles il faudra 9 heures.

On "voit" aussi que pour atteindre cette durée, il suffit de disposer de 2 opérateurs : par exemple un opérateur s'occupe de ces 9 tâches et l'autre opérateur des tâches restantes.